

On considère la fonction  $f$  définie par:  $f(x) = \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

$(C_f)$  est la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .

- 1) Montrer que  $D_f = \mathbb{R}$ .
- 2) a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} ; (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 5 = x^2 - 4x + 5$ .  
b) en déduire que le point  $I(4,0)$  est un centre de symétrie pour la courbe  $(C_f)$ .  
c) Calculer  $f(2)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .  
d) En déduire la nature de la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .  
e) Schématiser les résultants précédents.

- 3) a) Montrer que :  $f'(x) = \frac{2}{(x^2 - 4x + 5)\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

- b) Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- c) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

- 4) a) Donner l'équation de la tangente  $(\Delta)$  au point  $2$ .  
b) compléter la schématisation précédente en traçant la tangente  $(\Delta)$ .

- 5) a) Montrer que :

$$f''(x) = \frac{-6(x-2)}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^5}}$$

- b) Etudier la concavité et le point d'inflexion de  $(C_f)$  sur  $\mathbb{R}$ .

- 6) Tracer en bleu la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $(C_f)$  dans le repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
- 7) Montrer que  $f$  admet une bijection réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  qu'on déterminera.  
a) Calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$ .  
b) Calculer  $(f^{-1})'(0)$ .
- 8) Tracer en vert la courbe  $(C_{f^{-1}})$  dans le même repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ .
- 9) Déterminer la fonction primitive  $F$  de  $f$  vérifiant  $F(2) = 2$ .

Bonne Chance