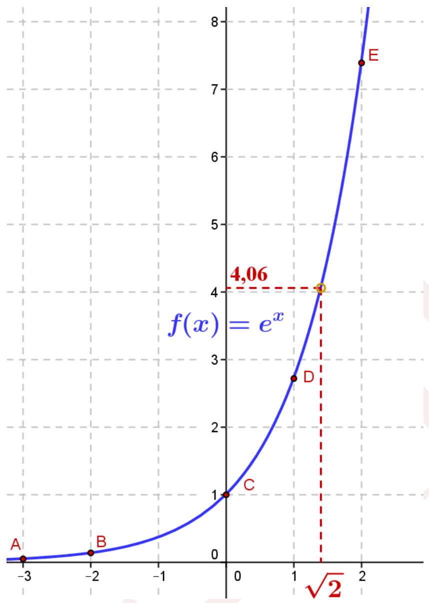
I. الدالة الأسية النبيرية

1) تقديم :

يوجد عدد حقيقي لا جدري نرمز له بالحرف e وقيمته التقريبية هي $e \approx 2{,}7$.
نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي: $(\forall x \in IR) \; ; \; f(x) = e^x$
لنحسب صور بعض الأعداد البسيطة بهذه الدالة باستعمال الآلة الحاسبة :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$e^{-3} \approx 0{,}05$	$e^{-2} \approx 0{,}14$	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}7$	$e^2 \approx 7{,}39$
نقط على C_f	A	B	C	D	E	F

بواسطة برنام مختص ننشيء C_f منحنى الدالة f :



2) الخصائص التحليلية للدالة :

✓ مجموعة التعريف و الاتصال : f معرفة ومتصلة على IR .

✓ النهايات :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

✓ الدالة المشتقة – التغيرات و إشارة : مشتقة للدالة f هي الدالة نفسها وبالتالي : $(\forall x \in IR) \; ; \; f'(x) = e^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$ تغيرات	0	$\nearrow$			$+\infty$
$f(x)$ إشارات		$+$	$+$	$+$	

✓ ملاحظات :

الملاحظة الأولى : $(\forall x \in IR) \; ; \; e^x > 0$.

الملاحظة الثانية : U دالة قابلة للإشتقاق ، حسب خاصية اشتقاق مركب دالتين لدينا : $(e^U)' = u' e^U$.

3) الخصائص الجبرية للدالة :

العدد e^x هو تعميم لقوة العدد e حيث أن الأس عدد حقيقي .

على سبيل المثال لدينا : $e^3 = e \times e \times e$ و $e^{3/5} = (e^3)^{1/5} = \sqrt[5]{e^3}$.

أما العدد $e^{\sqrt{2}}$ الذي يبدو على شكل قوة هو كذلك فلا يمكن حسابه إلا باستعمال منحنى الدالة أو طبعا باستعمال الآلة الحاسبة .

أما خصائص العدد e^x فهي نفسها خصائص القوة كما نعرفها: مهما يكن x من IR ومهما يكن r من Q .

$$(e^x)^r = e^{rx} \quad ; \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad ; \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad ; \quad e^x e^y = e^{x+y} \quad ; \quad e^0 = 1$$

II. الدالة اللوغارتمية النبيرية

1) تقديم :

الدالة الأسية النبيرية f السابقة $f(x) = e^x$ هي دالة متصلة وتزايدية قطعا من IR نحو $]0,+\infty[$.

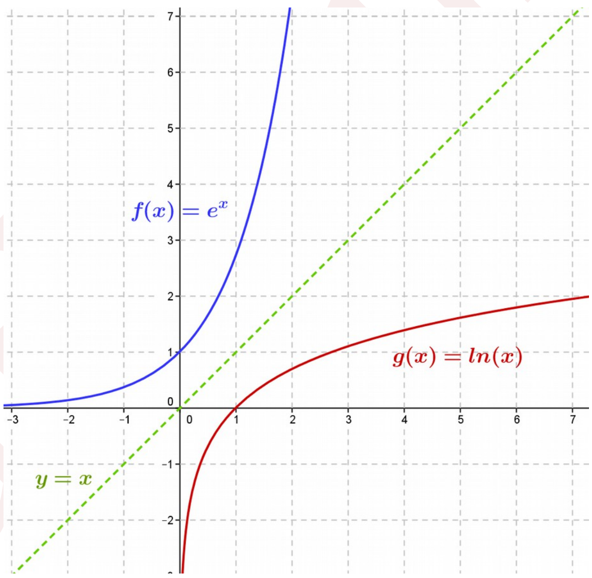
إذن الدلة فهي تقبل دالة عكسية g معرفة من $]0,+\infty[$ نحو IR . نضع : $g(x) = \ln x \; ; \; (\forall x \in]0,+\infty[)$

لدينا : $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x \; ; \; (\forall t \in IR)(\forall x \in]0,+\infty[)$

ومنه نستنتج مايلي :

لدينا	$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0^+$	...	$e^1 = e$	$e^0 = 1$	$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0^+$
ومنه	$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$	...	$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

بواسطة برنام مختص ننشىء C_g منحنى الدالة g (بالأحمر) وهو متماثل مع C_f (بالأزرق) بالنسبة للمنصف الأول :



4) الخصائص التحليلية للدالة :

✓ مجموعة التعريف : $D_f =]0,+\infty[$.

✓ النهايات :

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$

✓ الدالة المشتقة – التغيرات و إشارة : مشتقة الدالة g هي : $g'(x) = \frac{1}{x} \; ; \; (\forall x \in]0,+\infty[)$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$ تغيرات	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$
$g(x)$ إشارات	$-$	0	$+$

✓ ملاحظات :

الملاحظة الأولى : $\ln x < 0$; $(\forall x \in]0,1[)$ و. $\ln x > 0$; $(\forall x \in]1,+\infty[)$ و $x = 1 \Leftrightarrow \ln x = 0$

الملاحظة الثانية : U دالة قابلة للإشتقاق ، حسب خاصية اشتقاق مركب دالتين لدينا : $(\ln(|u|))' = \dfrac{u'}{u}$.

5) الخصائص الجبرية للدالة :

باستعمال العلاقة : $x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x$ نستنتج الخاصيات التالية :

مهما يكن x و y من $]0,+\infty[$ ومهما يكن r من Q .

$$\ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad ; \quad \ln(x^r) = r\ln x \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$$

III. الدالة اللوغارتمية و الدالة النبيرية ذات الأسس a

1) تقديم :

الدالة الأسية النبيرية f السابقة $f(x) = e^x$ تسمى كذلك الدالة الأسية ذات الأساس e .

ليكن a عدد حقيقي موجب قطعا ومخالفا للعدد 1 . الدالة الأسية ذات الأساس a هي الدالة u المعرفة كما يلي :

$$(\forall x \in IR) \; ; \; u(x) = e^{x\ln a}$$

نرمز للعدد $e^{x\ln a}$ ب a^x و هكذا تصبح صيغة الدالة : $(\forall x \in IR) \; ; \; u(x) = a^x = e^{x\ln a}$.

الدالة u هي دالة متصلة ورتيبة قطعا من IR نحو $]0,+\infty[$.

الدالة اللوغارتمية ذات الأساس a هي v الدالة العكسية للدالة الأسية ذات الأساس a . نضع :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) \; ; \; v(x) = \log_a(x)$$

لدينا : $y = \dfrac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow y\ln a = \ln x \Leftrightarrow x = e^{y\ln a} \Leftrightarrow x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a(x)$.

ومنه : $(\forall x \in]0,+\infty[) \; ; \; v(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

1) الخصائص الجبرية للدالة :

مهما يكن x من IR ومهما يكن r من Q .

$$a^0 = 1 \quad ; \quad a^x a^y = a^{x+y} \quad ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad ; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad ; \quad (a^x)^r = a^{rx}$$

مهما يكن x و y من $]0,+\infty[$ ومهما يكن r من Q .

$$\ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad ; \quad \ln(x^r) = r\ln x \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$$

Bonne Chance