

Fonction exponentielle népérienne

1) Introduction :

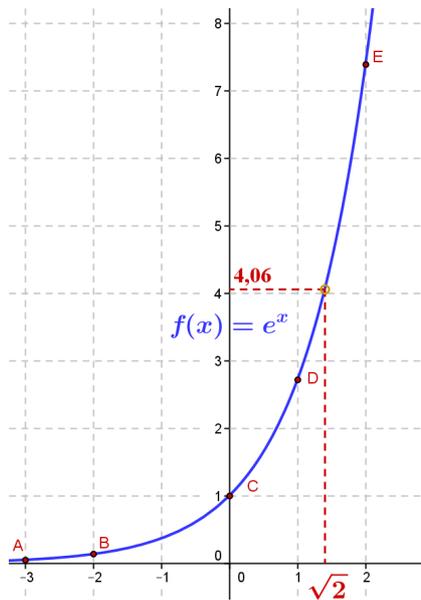
Il existe un nombre irrationnel note e, dont une valeur approchée est $e \approx 2,7$.

On considère la fonction f, définie sur IR par : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = e^x$.

Calculons les images de quelques nombres par cette fonction, en utilisant la calculatrice:

| | | | | | | |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---|-----------------|--------------------|
| X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| f(x) | $e^{-3} \approx 0,05$ | $e^{-2} \approx 0,14$ | $e^{-1} \approx 0,37$ | 1 | $e \approx 2,7$ | $e^2 \approx 7,39$ |
| pts sur C_f | A | B | C | D | E | F |

En utilisant un logiciel approprié, on trace la courbe C_f de la fonction f :



2) Propriétés analytiques de la fonction :

- ✓ **Domaine de définition et continuité** : f est définie et continue sur IR.
- ✓ **Limites** :

| | | | | |
|--|--|--|--|--|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ |
|--|--|--|--|--|

- ✓ **Fonction dérivée – Variations – Signe** : la dérivée de la fonction f est f elle-même :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = e^x$

| | | | |
|--------------------|-------------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) | + | 1 | + |
| f(x) تغيرات | ↗ $+\infty$ | | |
| f(x) إشارات | + | + | + |

- ✓ **Remarques** :

Première remarque : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$.

Deuxième remarque : U est une fonction dérivable, on a : $(e^U)' = u' e^U$

3) Propriétés algébriques de la fonction :

Le nombre e^x est une généralisation de la puissance du nombre e tel que x est réel.

On a par exemple : $e^3 = e \times e \times e$ et $e^{3/5} = (e^3)^{1/5} = \sqrt[5]{e^3}$.

Le nombre $e^{\sqrt{2}}$ est aussi une puissance du nombre e , mais on ne peut avoir que une valeur approchée en utilisant la courbe ou la calculatrice.

Les propriétés du nombre e^x ce sont les mêmes que ceus des puissances, quel que soit x de \mathbb{R} et r de \mathbb{Q} .

$$(e^x)^r = e^{rx} \quad ; \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x} \quad ; \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad ; \quad e^x e^y = e^{x+y} \quad ; \quad e^0 = 1$$

Fonction logarithme népérienne

1) Introduction :

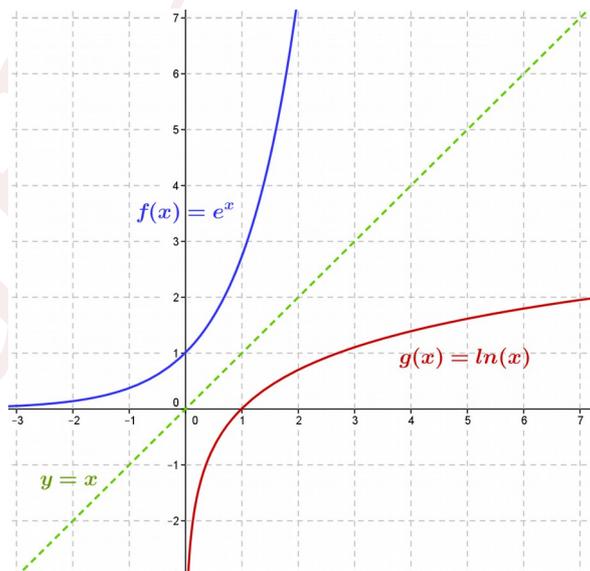
La fonction exponentielle f précédente est continue et strictement croissante de \mathbb{R} vers $]0, +\infty[$. Donc f admet une fonction réciproque g définie de $]0, +\infty[$ vers \mathbb{R} . On pose : $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $g(x) = \ln x$.

On a : $(\forall x \in]0, +\infty[) (\forall t \in \mathbb{R}) ; t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$

En en déduit : $e^0 = 1$ et $\ln e = 1$ et les limites remarquables suivantes :

| | | | | | |
|-------------|--|--|--|--|---|
| On a | $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ |
| D'où | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$ | $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ |

En utilisant un logiciel approprié, on trace la courbe C_g de la fonction f , qui est le symétrique de C_f par rapport à la première bissectrice $(\Delta) : y = x$:



2) Propriétés analytique de la fonction :

- ✓ **Domaine de définition et continuité :** g est définie et continue sur $D_g =]0, +\infty[$.
- ✓ **Limites :**

Quel que soit les nombres réels x et y et quel que soit le nombre rationnel r .

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad \ln(x^r) = r \ln x \quad ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad ; \quad \ln 1 = 0$$

Bonne Chance