المعامل : 9	إ متحان تجريبي للسنة الثانية باكالوريا رقم 6 الشعبة : العلوم الرياضية (أ - ب) ثانوية المختار السوسي نيابة الخميسات	المادة : الرياضيات
مدة الإنجاز : 4 ساعات		الأستاذ : علي الشريف

آضبط ساعتك و أنجز هذا الإمتحان في ورقة نظيفة محترما الوقت المحدد مع آخترام ضوابط و طقوس الإمتحان

التمرين الأول : 3ن

ليكن n عددا من $IN^*-\{1\}$, نرمز ب $\sigma(n)$ لمجموع القواسم الموجبة للعدد n و ب P^+ ليكن n عددا من $IN^*-\{1\}$,
نرمز ب $\sigma(n)$ لمجموع القواسم الموجبة للعدد n و ب P^+ لمجموعة الأعداد الأولية الموجبة.

1) بين أن $\forall p \in P^+ \ : \ \sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1}}{p-1}$.

2) ليكن: $x = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha i}$ التفكيك لجداء عوامل أولية للعدد x . - بين أن : $\sigma(x) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{p_i^{\alpha i+1}-1}{p_i-1}$.

3) بين أنه إذا كان x و y عددين من $IN^*-\{1\}$ و $x \wedge y = 1$ فإن $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

II- تعريف ليكن n عددا من IN^* , نقول إن العدد n كامل إذا كان $\sigma(n) = 2n$.

نقول إن M_n عدد Mersenne إذا كان $M_n = 2^n - 1$

1) ليكن x و n عددين من IN بحيث $x \geq 3$ و $x \geq 2$ - بين أن: $x^n - 1 \notin P^+$.

1) ليكن n عددا من $IN^*-\{1\}$. بين أن $n \in P^+ \Rightarrow 2^n - 1 \in P^+$

3) احسب M_{11} , هل M_{11} أولي ؟ ماذا تستنتج؟

III- ليكن p عددا من IN^* ,نضع $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$

1) بين أنه إذا كان N_p عدد كامل فإن p أولي.

2) ليكن n عدد زوجي كامل.

أ- بين أنه يوجد عددين a و b من IN^* بحيث: $n = 2^a.b$ و b فردي.

ب- بين أنه يوجد عدد c من IN بحيث : $b = (2^{a+1}-1)c$ و $\sigma(b) = 2^{a+1}.c$.

ج- بين أن $c = 1$.

التمرين الثاني : 3ن

نعتبر f_a التطبيق من $C-\{a\}$ نحو $C-\{a\}$ المعرف بمايلي : $f_a(z) = \dfrac{az}{z-a}$ حيث $a \in C^*$

1) بين أن : $f_a(z) \in i \ IR \Leftrightarrow |z|^2 \ \ R_e(a) = |a|^2 \ R_e(z)$

2) ليكن z من $C-\{a\}$ نضع $|z-a| = r$ و $\arg(z-a) \equiv \theta[2\pi]$

احسب $|f_a(z)-a|$ بدلالة r و $|a|$ و $\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ و $\arg a$.

3) نضع فيما يلي : $a = -1+i$ ونعتبر في المستوى (P) المنسوب إلى م.م.م.م $(O,\vec{u},\vec{v})$ المجموعات التالية :

$(\sigma) = \{M(z)/|f_a(z)-a| = 2\}$ و $(E) = \{M(z)/f_a(z) \in i\,IR\}$

و $(D) = \left\{M(z)/\arg(f_a(z)-a) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$

أ- حدد كلا من (E) و (σ) و بين أن (D) نصف مستقيم طرفه $A(a)$ محروم من النقطة $A(a)$ محددا معادلة ديكارتية له.

ب-ليكن z_θ من $C-\{a\}$ و النقطة B ذات اللحق z_θ بحيث B تنتمي إلى $(D)\cap(\sigma)$

اكتب $f_a(z_\theta)$ على الشكل الجبري ثم اشتنتج z_θ .

ت-أنشيء (σ) و (E) و (D) في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

التمرين الثالث : 3ن

I) لتكن $E = IR - \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 نضع : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$.

1 - تحقق أن لكل زوج (a,b) من E^2 : $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$

2 - بين أن $(E,\perp)$ زمرة جزئية تبادلية .

I I) $M_2(IR)$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . ندكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(M_2(IR),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي . لتكن F مجموعة المصفوفات من $M_2(IR)$ التي تكتب على الشكل : $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$ حيث $a \in E$: نضع $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1 - أ - تحقق أن : $A^2 = -2A$ وأن : $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}.A$.

ب - بين أن : F جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$.

2 – نعتبر التطبيق :

$$\varphi : (E,\perp) \to (F,\times)$$
$$a \to \varphi(a) = M(a)$$

أ - بين أ ن φ تشاكل تقابلي .

ب - آ ستنتج بنية $(F,\times)$.

التمرين الرابع : 3ن

للا جتياز أحد الإمتحانات الشفوية , يسحب المرشح سؤالا واحدا من بين 9 أسئلة موزعة على الشكل التالي :

- 3 أسئلة في الرياضيات - 4 أسئلة في الفيزياء - سؤالان في الطبيعيات .

نفترض أن جميع الأسئلة لها نفس آ حتمال السحب و أن آحتمال أن يعطي المرشح جوابا صحيحا إداكان السؤال في الرياضيات هو $\frac{4}{10}$ و آحتمال أن يعطي المرشح جوابا صحيحا إدا كان السؤال في المادتين الأخرتين هو $\frac{9}{10}$.

1) أحسب آحتمال الأحداث التالية :

A " المرشح يعطي جوابا صحيحا للسؤال الدي يسحبه "

B " السؤال المسحوب , في الرياضيات و المرشح لا يعطي جوابا صحيحا "

C " السؤال المسحوب ليس في الرياضيات و المرشح يعطي جوابا صحيحا "

2) علما أن المرشح أعطى جوابا صحيحا للسؤال , ما هو الإحتمال q لكي يكون السؤال في الرياضيات ؟

3) نفترض أن خمسة مترشحين تقدموآ لإجتياز هدا الإمتحان بنفس المعطيات السابقة الدكر .

أحسب إحتمال أن يتوفق 3 مرشحين فقط من بين هؤلاء المرشحين الخمسة .

مسألة : 8ن

n عدد صحيح طبيعي أكبرأو يساوي 1 .

I) – لتكن الدالة العددية g_n المعرفة على IR بما يلي : $g_n(x) = 1 + x - e^{-nx}$

1) أ - أدرس تغيرات الدالة g_n .

ب - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ و أعط جدول تغيرات g_n .

ت - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g_n(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

ث - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) - x - 1$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

ج – آ ستنتج أن $x_0 = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g_n(x) = 0$.

ح - مثل مبيانيا الدالة g_1 في م.م.م .

2) أ - بين أن : $(\forall n \geq 1)(\exists! x_n \succ 0) \quad g_n(x_n) = 1$.

ب – أدرس إشارة $g_{n+1}(x) - g_n(x)$

ت - آ ستنتج أ ن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تناقصية .

ث - بين أ ن : $(\forall n \geq 1) \quad x_n = e^{-nx_n}$

ج - آستنتج نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$.

I I) نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كما يلي : y_1 و $\forall n \in IN^*; y_{n+1} = e^{-y_n}$

1) بين أ ن x_1 هو الحل الوحيد للمعادلة $e^{-x} = x$ و أ ن $\frac{1}{e} \leq x_1 \leq 1$

2) أ - بين أ ن : $\forall n \in IN^* \; ; \; \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

ب - بين أن : $\forall n \in IN^* ; |y_{n+1} - x_1| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - x_1|$

ث – آستنتج أن : $(y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتها .

I I I) لتكن F الدالة العددية المعرفة كما يلي : $F(0) = \frac{1}{2}$ و $\forall x \succ 0 \; ; F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{g_1(t)} . dt$

1) أ - بين أ ن : $\forall t \succ 0 \; ; \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{g_1(t)} \leq \frac{1}{t}$

ب - آ ستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

2) أ - بين أ ن : $\forall t \succ 0; 1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

ب - آ ستنتج أ ن F متصلة على اليمين في 0 .

ت - أدرس إشتقاق F على اليمين في 0 .

3) أ – بين أ ن F قابلة للإستقاق على IR_+^* و أ حسب $F'(x)$ من أ جل $x \succ 0$.

ب- أدرس تغيرات F على IR^+ .

ت – مثل مبيانيا الدالة F .