المادة : الرياضيات	إ متحان تجريبي للسنة الثانية باكالوريا رقم 9	المعامل : 9
الأستاذ : علي الشريف	الشعبة : العلوم الرياضية (أ - ب) ثانوية المختار السوسي نيابة الخميسات	مدة الإنجاز : 4 ساعات

آضبط ساعتك و أنجز هذا الإمتحان في ورقة نظيفة محترما الوقت المحدد مع آخترام ضوابط و طقوس الإمتحان

التمرين الأول : 3ن

في المستوى العقدي P منسوب إلى م.م .م $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. نعتبر النقطتين $A(i)$ و $A'(-i)$ و f التطبيق من $C-\{i\}$ نحو C

و المعرف ب: $f(z)=\dfrac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$ و F التطبيق من $P-\{A\}$ نحو P يربط كل نقطة $M(z)$ ب $M'(z')$ حيث : $z'=f(z)$

1) أ - أثبت أن: $|z'|=|z|$ و $\arg z' \equiv -\arg z+2\arg(z-i)\,[2\pi]$ إذا كان $z\neq 0$ و $z\neq i$.

ب) بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن $f(z)=-i$

2) أ) حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F.

ب) ماهي مجموعة النقط $M(z)$ حيث تكون $f(z)\in iIR$ ؟

3) أ) بين $z'+i=\dfrac{z\bar{z}-1}{\left|\bar{z}+i\right|^2}(z-i)$ و $z'-z=\dfrac{-i\left(z+\bar{z}\right)}{\left|\bar{z}+i\right|^2}(z-i)$.

ب- استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان وأن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$.

ج - آستنتج طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F .

التمرين الثاني : 3ن

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات سوداء . نعتبر التجربة التالية : نرمي قطعة نقدية غير مغشوشة إدا سقطت على وجهها نضيف كرة بيضاء إلى الكيس ثم نسحب منه ثلاث كرات تآنيا , وإ دا سقطت على ظهرها نضيف كرة سوداء إلى الكيس ثم نسحب منه ثلاث كرات تآنيا .

1 – نضع الحدث E_0 " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة "

و الحدث B " القطعة النقدية سقطت على وجهها "

أ - حدد $p\left(E_0\cap B\right)$ و $p\left(E_0\cap\overline{B}\right)$ ثم آستنتج $p\left(E_0\right)$.

ب - سحبنا ثلاث كرات من الكيس و لاحظنا أنه لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الثلاثة المسحوبة .
ما هو الإحتمال أن تكون القطعة سقطعت على ظهرها ؟

2 - ليكن الحدث E_1 " سحب كرة بيضاء واحدة بالضبط "

أ – أحسب $p\left(E_1\right)$.

ب- ليكن $n\in IN$ مع $n\geq 2$. نعيد التجربة السابقة n مرة مع إعادة الكيس إلى تركيبته الأولى بعد نهاية كل تجربة .
أحسب p_n آ حتمال تحقق الحدث E_1 مرة واحدة على الأقل خلال التجربة n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

التمرين الثالث : 3ن

نعتبر في $M_3(IR)$ المصفوفتين : $A=\begin{pmatrix}0&0&3\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

نذكر أن : $(M_3(IR),+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و $(M_3(IR),+;\times)$ حلقة واحدية .

1) بين أن الأسرة $\left(I,A,A^2\right)$ حرة في $(M_3(IR),+;\bullet)$.

2) أ - أحسب A^2 و A^3 ثم A^n بدلالة n من *IN (ناقش حسب بواقي قسمة n على 3)

ب – تحقق أن A تقبل مقلوبا A^{-1} ينبغي تحديده .

3) لتكن المجموعة : $E=\{M\in M_3(IR)/\exists(a,b,c)\in IR^3; M=a.I+b.A+c.A^2\}$

أ- بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(M_3(IR),+)$.
ب – تحقق أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .
ج – حدد أساسا ل E .
4) أ – بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .
ب – أحسب محددة المصفوفة $-\sqrt[3]{3}.A+A^2$.
ج- هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ علل جوابك .

التمرين الرابع :

3ن نضع $E=\{0,1,2,....,25\}$. ليكن a و b عنصرين من E. نعتبر التطبيق φ من E إلى E المعرف بما يلي :
لكل N من E : $\varphi(n)=an+b$
1- نفترض أن $\varphi(5)=10$ و $\varphi(19)=14$
أ - بين أ ن : $14a\equiv 4[26]$
ب – حل في Z^2 المعادلة : $14x-26y=1$
ج – آ ستنتج قيمة الزوج (a,b)
2 – نفترض أ ن : $a=15$ و $b=3$
أ – بين أ نه إداكان $\varphi(n)=\varphi(p)$ فإن $n=p$
ب - ليكن n و m عنصرين من المجموعة E بحيث : $\varphi(n)=m$. أ حسب n بدلالة m.
ج – آستنتج أن التطبيق φ تقابلا من E نحو E ثم أ عط صيغة التقابل العكسي φ^{-1} .

مسألة :

8ن I – ليكن λ بارمتريا حقيقيا نعتبر الدالة العددية f_λ المعرفة على IR_+^* بما يلي : $f_\lambda(x)=\dfrac{\ell n(x)+\lambda}{x^2+1}$
و (C_λ) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1 – أ - لتكن $M(\alpha,\beta)$ نقطة من المستوى بحيث $\alpha\succ 0$ بين أ نه يوجد منحنى (C_λ) وحيد يمر من النقطة $M(\alpha,\beta)$.
ب – بين أ ن f_λ قابلة للإشتقاق على IR_+^* و أن إشارة $f_\lambda'(x)$ هي إشارة $g_\lambda(x)$
حيث : $g_\lambda(x)=x^2+1-2x^2(\ell n(x)+\lambda)$
ج – أدرس تغيرات الدالة g_λ محددا النهايات $\lim\limits_{x\to 0^+} g_\lambda(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\lambda(x)$.
د - بين أن المعادلة $g_\lambda(x)=0$ تقبل حلا وحيدا m_λ ثم آستنتج إشارة g_λ .
ه – بين أن $f_\lambda(m_\lambda)=\dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.
و – أحسب نهايات f_λ عند محدات $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .
2 – أ - بين أ ن $m_0\in]1,2[$ و $m_1\in]4,5[$ و حدد قيمة m_1 .
ب- أدرس الوضع النسبي ل (C_λ) و $(C_{\lambda'})$ حيث $(\lambda,\lambda')\in IR^2$
3 – أنشئ في نفس المعلم المنحنيات $(C_0),(C_{-1}),(C_1)$.
I I – نعتبر الدالتين العدديتين φ و F المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\int_1^x f_0(t).dt=\int_1^x \frac{\ell n(t)}{1+t^2}dt \ , \ x\succ 0 \\ F(0)=\int_0^1 \varphi(t)dt \end{cases}$$ و $$\begin{cases} \varphi(x)=\frac{Arc\tan(x)}{x} \ , \ x\succ 0 \\ \varphi(0)=1 \end{cases}$$

1 – أ - بين أن F معرفة على IR^+ .

ب- بين أن F متصلة وقابلة للإشتقاق على IR_+^* و أحسب $F'(x)$ لكل $x\succ 0$.

2 - بين أ ن : $(\forall x\succ 0),\ F\left(\frac{1}{x}\right)=F(x)$.

3- أ - بين أن : $(\forall x\succ 0),\ F(x)=(Arc\tan(x)).\ell n(x)-\int_1^x \varphi(t)dt$

ب – آ ستنتج أن F متصلة في الصفر .

ج- بين أن $(\forall x\succ 0),\ \frac{F(x)-F(0)}{x}\leq \varphi(x).\ell n(x)$ ثم آستنتج أن F قابلة للإشتقاق في الصفر . و أول هندسيا هده النتيجة .

4 – نضع لكل $k\in IN$ ولكل $x\succ 0$: $I_k(x)=\int_1^x t^k \ell n(t)dt$

أ – بآستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall x\succ 0)(\forall k\in IN),\ I_k(x)=\frac{1}{k+1}.x^{k+1}\ell n(x)-\frac{1}{(k+1)^2}.x^{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

ب – أحسب $\lim_{x\to 0^+} I_k(x)$ ثم بين أ ن $\lim_{x\to 0^+}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

ج – بين أن $(\forall x\succ 0)(\forall n\in IN)\ \frac{1}{x^2+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+\frac{(-1)^{n+1}.x^{2n+2}}{x^2+1}$

د – آ ستنتج أن $(\forall x\succ 0),F(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)+(-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ell n(t)}{1+t^2}.dt$

ه – آ ستنتج أن $(\forall x\in]0,1[)\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right|\leq I_{2n+2}(x)$

5 – نضع $(\forall n\in IN):u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

بآستعمال السؤال 4 – أ – بين أن $(\forall n\in IN),\left|F(0)-u_n\right|\leq \frac{1}{(2n+3)^2}$ ثم حدد قيمة مقربة للعدد $F(0)$ بالدقة 10^{-2} .