التمرين 1. — Maths-inter.ma — Exercice .1

1) f الدالة المعرفة كما يلي: $f(x)=e^{x}+x-1$

a) أحسب $f(0)$.

b) بتطبيق مبرهنة Rolle بين أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا.

2) g الدالة المعرفة كما يلي: $g(x)=x-\cos x$

a) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$

b) بين أن : $\frac{\pi-2\sqrt{2}}{\pi-4\alpha}=1+\sin c \quad ; \quad \exists c\in\left]\alpha;\frac{\pi}{4}\right[$

التمرين 2. — Maths-inter.ma — Exercice .2

1) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية . بين أنه مهما يكن a و b بحيث $0<a<b<\pi/2$ ، فإن:

$$\frac{b-a}{\cos^{2}a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^{2}b}$$

2) بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية . بين أنه مهما يكن a و b بحيث $0<a<b$ ، فإن:

$$\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}$$

التمرين 3. — Maths-inter.ma — Exercice .3

1) بين أنه مهما يكن a و b بحيث $0<a<b$ فإن: $\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}$

2) استنتج أن :

a) $\frac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x \quad ; \quad \forall x>0$

b) $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n} \quad ; \quad \forall n\in IN^{*}$

3) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$ بحيث: $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n$

a) بين أن المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$ تناقصية قطعا.

b) نقبل أن المتتالية $(U_n)_{n\ge1}$ متقاربة وأن $\lim_{n\to+\infty}U_n=k$.

بين أن $0\le k\le 1$ (العدد k يسمى ثابتة Euler ونجهل لحد الآن ما إذا كان هذا العدد جدريا أم لا)

التمرين 4. — Maths-inter.ma — Exercice .4

1) باستعمال TAF بين أن : $\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x} \quad ; \quad \forall x>0$

2) أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})$

3) بين أن : $x\ln(1+\frac{1}{x})<1<(x+1)\ln(1+\frac{1}{x}) \quad ; \quad \forall x\ge1$

4) نعتبر المتتاليتين $(U_n)_{n\ge1}$ و $(V_n)_{n\ge1}$ بحيث:

$$U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad \text{و} \quad V_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ونعتبر الدالة f_n $(n\ge1)$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f_n(x)=\ln(1+nx)-\frac{n}{n+1}\ln x$$

a) بين أن : $U_n\le e\le V_n \quad ; \quad \forall n\in IN^{*}$

b) أدرس تغيرات الدالة f_n ، ثم بين أن :

$$f_n(x)>\ln(1+n) \quad ; \quad \forall x>0 \text{ et } x\ne1$$

c) استنتج أن : $x^{n}<\left(\frac{1+nx}{1+n}\right)^{n+1} \; ; \; \forall x>0 \text{ et } x\ne1$

d) نوضع $x=1+\frac{1}{n}$ ثم $x=\frac{n}{n+1}$ على التوالي ، بين أن $(U_n)_{n\ge1}$ تزايدية وأن $(V_n)_{n\ge1}$ تناقصية.

التمرين 5. — Maths-inter.ma — Exercice .5

f و g دالتان متصلتان على المجال $[a;b]$ وقابلتان للاشتقاق على المجال $]a;b[$ بحيث: $\forall x\in]a;b[\;;\; g'(x)\ne0$.

1) باستعمال مبرهنة Rolle بين أن : $g(a)\ne g(b)$.

2) نعتبر الدالة φ المعرفة على المجال $[a;b]$ كما يلي:

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-k[g(x)-g(a)]$$

a) حدد k لكي يكون $\varphi(b)=0$.

b) استنتج أن : $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad ; \quad \exists c\in]a;b[$

3) <u>مبرهنة لوبيتال Théorème de l'Hopital</u> : U و V قابلتان للاشتقاق بجوار النقطة a .

a) بين أنه ؛ إذا كان $\frac{U'(x)}{V'(x)}$ يقبل نهاية L عندما يؤول x الى a ، فإن $\frac{U(x)-U(a)}{V(x)-V(a)}$ يقبل نفس النهاية L عندما يؤول x الى a .

b) بين أن عكس هذه الخاصية غير صحيح باعتماد المثال المضاد التالي ، حيث $a=0$ و $U(x)=x^{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ و $V(x)=\sin x$.

c) هل يمكن تعميم هذه النتائج إذا كان x يؤول الى ∞ ؟

d) أحسب $\lim_{x\to0}\frac{\text{Arctan}\,x}{\sin x}$