Exercice .1 Maths-inter.ma 1. التمرين

لكل زوج (x,y) من المجموعة $\mathbb{R}^2$ نضع: $x\perp y = x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$

1) a) تحقق من أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$.

b) تحقق من أن لكل زوج (x,y) من المجموعة $\mathbb{R}^2$: $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+xy=\sqrt{1+(x\perp y)^2}$

2) a) بين أن التطبيق u المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $u(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ وحدد u^{-1}.

b) باستعمال التطبيق u أو u^{-1} بين أن: $(\mathbb{R};\perp)$ زمرة تبادلية.

c) حدد العنصر المحايد للزمرة $(\mathbb{R};\perp)$ ومماثل عنصر x من المجموعة $\mathbb{R}$ بالنسب للقانون $\perp$.

3) نضع لكل $x\in\mathbb{R}$ و لكل عدد عدد صحيح طبيعي $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$: $x^{[0]}=0$ و $x^{[1]}=x$ و

$$x^{[n]}=\underbrace{x\perp x\perp\cdots\perp x}_{\text{n مرة}}$$

احسب $x^{[n]}$ بدلالة x و n .

Exercice .2 Maths-inter.ma 2. التمرين

نذكر أن $(M_3(IR),+,\times)$ حلقة واحدية .

نعتبر المجموعة $G=\left\{M_\theta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}/\theta\in IR\right\}$.

1) بين أن G جزء مستقر بالنسبة لضرب المصفوفات في $M_3(IR)$.

2) نعتبر المجموعة : $U=\{z\in C/\ |z|=1\}$.

بين أن $(U,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(C^*,\times)$.

3) نعتبرالتطبيق ϕ المعرف من U نحو G بحيث : $\phi(e^{i\theta})=M_\theta$.

a) بين أن ϕ تشاكل تقابلي من $(U,\times)$ نحو $(G,\times)$.

b) استنتج أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية .

4) أحسب $(M_\theta)^{-1}$ و $(M_\theta)^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

Exercice .3 Maths-inter.ma 3. التمرين

A- نعتبر المجموعة $G=IR-\{\sqrt{3}\}$.

لكل a و b من G نضع : $a*b=a+b-\frac{ab}{\sqrt{3}}$.

1) تحقق من أن $\forall(a,b)\in G^2\ a*b=\sqrt{3}-\sqrt{3}(\frac{a}{\sqrt{3}}-1)(\frac{b}{\sqrt{3}}-1)$.

2) بين أ ن $(G,*)$ زمر ة تبا دلية .

B -نعتبر المجموعة $\Gamma=\left\{M(a)=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-a&a\\a&2\sqrt{3}-a\end{pmatrix}/a\in G\right\}$,

و المصفوفتين $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) a) تحقق من أن $J^2 = -2J$ و أن $\forall a \in G, M(a) = I + \frac{a}{2\sqrt{3}} J$.

b) بين أن المجموعة Γ جزء مستقر من $(M_2(IR), \times)$.

2) نعتبر التطبيق $\begin{aligned} f : G &\to \Gamma \\ a &\mapsto M(a) \end{aligned}$.

a) بين أن f تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(\Gamma, \times)$.

b) استنتج بنية $(\Gamma, \times)$.

Bonne Chance