Exercice .1 Maths-inter.ma التمرين 1.

نعتبر المصفوفات الآتية : $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

1) a) تحقق أن : $(A+3I)\times(A-I)=0$

b) استنتج A^2 بدلالة I و A

2) نعتبر المجموعة E للمصفوفات $M(a,b)=aI+bA$ ، بحيث $a\in IR$ و $b\in IR$

a) بين أن : $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

b) بين أن الأسرة (I,A) أساس للفضاء المتجهي $(E,+,.)$

3) a) بين أن E جزء مستقر من $(M_3(IR),\times)$

b) بين أن : $(E,+,\times)$ حلقة واحدية وتبادلية . هل هي كاملة؟

4) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ محددا مقلوبها.

Exercice .2 Maths-inter.ma التمرين 2.

نضع $\text{E}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b & \frac{-\sqrt{2}}{2}b\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}b & a-\frac{\sqrt{2}}{2}b\end{pmatrix}/(a,b)\in IR^2\right\}$ ، و $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

1) a) بين ان $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

b) بين ان الأسرة (I,J) اساس في الفضاء المتجهي $(E,+,.)$

2) نضع $E^*=E-\{M(0,0)\}$ نعتبر التطبيق :
$$\begin{aligned} h:C^* &\longrightarrow E^*\\ \text{a}+\text{bi} &\rightarrow M(a,b)\end{aligned}$$

a) تحقق من ان $J^2=-I$

b) استنتج ان E جزء مستقر في $(M_2(IR),\times)$

c) بين ان h تشاكل تقابلي من $(C^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

d) أستنتج بنية $(E^*,\times)$

3 - حدد في E المصفوفة X حيث $X^3=J$

Exercice .3 Maths-inter.ma التمرين 3.

نعتبر المصفوفتين : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

1) احسب J^2 بدلالة I و J

2) بين أن (I,J) أسرة حرة في $(M_3(\square),+,.)$

3) نعتبر المجموعة : $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}/(a,b)\in IR^2\right\}$

a) بين أن F فضاء متجهي جزئي من $(M_3(IR),+,.)$

b) تحقق أن $I\in F$ و $J\in F$

c) استنتج أساسا للفضاء المتجهي $(F,+,.)$

4) a) بين أن $(F,+,\times)$ حلقة واحدية.

b) بين أن J تقبل مقلوبا في F ثم حدد J^{-1} (يمكنك استعمال السؤال 1)

Exercice .4 Maths-inter.ma التمرين .4

نذكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_2(IR),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و $(C,+,\times)$ جسم تبادلي .

نضع : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}/(a,b)\in IR^2\right\}$ و $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1) a) بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(IR),+,.)$.

b) بين أن الأسرة (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$.

2) نعتبر التطبيق :
$$\begin{aligned} f:C &\longrightarrow E \\ a+bi &\to M(a-b,b) \end{aligned}$$

a) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$

b) بين أن f تشاكل تقابلي من $(C,\times)$ نحو $(E,\times)$.

3) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية .

4) a) حل في المجموعة C المعادلة : $z^3=2-2i$ واكتب حلولها على الشكل الجبري .

b) استنتج في المجموعة E حلول المعادلة : $M^3-4I+2J=0$