Exercice .1 Maths-inter.ma 1. التمرين

لتكن E مجموعة الدوال العددية $f_{(a,b)}$ بحيث $\forall x \in IR : f_{(a,b)}(x) = (ax+b)e^{2x}$

1(a بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

b) نضع $B = (f_{(1,0)}, f_{(0,1)})$ بحيث $f_{(1,0)}(x) = xe^{2x}$ و $f_{(0,1)}(x) = e^{2x}$.

بين أن B أساس للفضاء المتجهي E .

2) نزود المجموعة E بقانون تركيب داخلي معرف كما يلي: $f_{(a,b)}Tf_{(c,d)} = f_{(ac-bd,bc+ad)}$ لكل $f_{(a,b)}$ و $f_{(c,d)}$ من E

نعتبر التطبيق $\phi : C^* \longrightarrow E^*$ بحيث $\varphi(z) = f_{(a,b)}$ مع $z = a+ib$ مع $(a,b) \in IR^2$

a) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(C^*,\times)$ نحو (E^*,T)

b) استنتج بنية (E^*,T) ثم بين أن $(E,+,T)$ جسم تبادلي.

c) حل في E المعادلة $\underbrace{f_{(a,b)}Tf_{(a,b)}T....Tf_{(a,b)}}_{\text{n مرة}} = f_2$

Exercice .2 Maths-inter.ma 2. التمرين

$M_3(IR)$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 .

نذكر أن $(M_3(IR),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(M_3(IR),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن E مجموعة المصفوفات $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ حيث a و b و c أعداد حقيقية

ونعتبر المصفوفتين $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2) بين أن (I,J,K) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$

3) أ – تحقق أن $J^2 = I+K$ وأن $K^2 = I$ وأن $JK = KJ = J$

ب – استنتج أن E جزء مستقر من $(M_3(IR),\times)$

ج – بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية

4) هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ (يمكنك استعمال 3) أ –)

5) نضع $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}J$

أ – بين أن $X^2 = \dfrac{1}{2}(I+K)$ ثم أن $X^3 = X$

ب – استنتج أن لكل n من IN^* $X^{2n-1} = X$

Bonne Chance