Exercice 1. Maths-inter.ma 1. التمرين

on considère la suite (U_n) définie par pour tout entier n non nul par :

$$U_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t.dt$$

1)

a) montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad U_n = \frac{n+2}{n+1}.U_{n+2}$$

b) En déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad U_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{1\times3\times5\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\ldots\times(2n)}$$

c) Déterminer U_{2n+1} en fonction de n et de π .

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad 2.U_{2n} \le \pi \le 2(2n+1)U_{2n+1}$

4) Soit n un entier non nul .

a) Montrer que :

$$\left(\frac{1}{4^n}C_{2n}^n\right)^2.\frac{16(n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{U_{2n+1}}{U_{2n+2}}$$

b) Montrer que :

$$\frac{U_{2n}}{U_{2n+1}} = 2(n+1)\left(\frac{1}{4^n}C_{2n}^n\right)^2$$

c) Déduire la limite de la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{1}{4^n}.\sqrt{n}.C_{2n}^n$$

Bonne Chance