Exercice 1. Maths-inter.ma 1. التمرين

Les parties A , B , C , D , E, F sont totalement indépendantes

Partie : A

Soit f une fonction continue et croissante sur l'intervalle $[a,b]$ (a<b).
On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

1) Soit $n \in IN^*$.

a) Pour tout $k \in \{1,2,3,...,n-1\}$, on pose : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$

Montrer que $\dfrac{b-a}{n} f(x_k) \leq \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \leq \dfrac{b-a}{n} f(x_{k+1})$

b) En déduire que : $S_n =\leq \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \leq \dfrac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)$

2) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$

3) **Application :**
Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[n]{2^k} = \dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{2^2}+\sqrt[n]{2^3}+....+\sqrt[n]{2^{n-1}}}{n}$

b) $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2-k^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{n^2-2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{n^2-(n-1)^2}}$

c) $U_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k^2} = n(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{(2n-1)^2}})$

Partie : B

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Ln(k+n) - Ln(n) = \frac{1}{n}\big(Ln(1+n)+Ln(2+n)+...+Ln(2n)\big) - Ln(n)$$

4) Montrer que : $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Ln(1+\frac{k}{n})$

a) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$, on pose : $x_k = 1+\dfrac{k}{n}$

Montrer que $\dfrac{1}{n}Ln(1+\dfrac{k}{n}) \leq \displaystyle\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} Ln(t)dt \leq \dfrac{1}{n}Ln(1+\dfrac{k+1}{n})$

b) En déduire que : $U_n - \dfrac{1}{n}Ln2 \leq \displaystyle\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} Ln(t)dt \leq U_n$

5) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Partie : C

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$U_n = \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{1}{2n+p} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n-1}$$

1) Montrer que $\int_{2n+1}^{4n+1} \frac{dt}{t} \leq 2U_n \leq \int_{2n-1}^{4n-1} \frac{dt}{t}$
2) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Partie : D

Soit p un entier naturel non nul et f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $f(x) = x^p$. On pose pour tout n non nul :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$$

1) En interprétant par un calcul d'aires, montrer :

   Montrer que $S_n \leq \int_0^1 f(t)dt \leq T_n$ et $T_n - S_n = \frac{1}{n}$

2) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ puis calculer les limites :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^p+2^p+3^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}\right) \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}\right) \ ; \ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^p+2^p+3^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}\right)$$

Partie : E

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$U_n = \int_{Lnn}^{Ln(n+1)} e^{2x}dx$$

3) Exprimer U_n en fonction de n.
4) Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite Arithmétique, dont on précisera la raison et le premier terme.
5) Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par $V_n = e^{U_n}$ est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

Partie : F

On considère : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

6) Montrer que $U_n \geq 0$ pour tout n.
7) Etudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$ n déduire le sens de variations de $(U_n)_{n\geq 1}$
8) Montrer que $(\forall x \in [0,1])$; $\frac{1}{1+x} \leq 1$, en déduire que $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

   Déterminer alors la limite de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.

Bonne Chance