Exercices : 1

On considère pour n entier non nul, la suite : $U_n = \int_0^{1/2} (1-2t)^n e^{-t}\,dx$

1) Montrer que pour tout n et pour tout $(\forall t \in [0,1/2])$; $\frac{1}{\sqrt{e}}(1-2t)^n \le (1-2t)^n e^{-t} \le (1-2t)^n e$

   En déduire la relation : $\frac{1}{2\sqrt{e}(n+1)} \le U_n \le \frac{1}{2(n+1)}$

2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3) En utilisant une intégration par parties, calculer U_1 , puis établir une relation de récurrence entre U_n et U_{n+1}.

Exercices : 2

On considère : $U = \int_0^t \frac{x^2}{1+x}dx$

1) Montrer que : $(\forall t \succ 0)$; $\frac{1}{3(t+1)}t^3 \le U \le \frac{1}{3}t^3$

2) Calculer : $U = \int_0^t \frac{x^2}{1+x}dx$

3) En déduire $\lim\limits_{n\to 0^+} \frac{Ln(1+t)-t}{t^2}$

Exercices : 3

On considère : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1) Montrer que $U_n \ge 0$ pour tout n.

2) Etudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$ en déduire le sens de variations de $(U_n)_{n\ge1}$

3) Montrer que $(\forall x \in [0,1])$; $\frac{1}{1+x} \le 1$, en déduire que $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$

   Déterminer alors la limite de la suite $(U_n)_{n\ge1}$.

4) On considère : $V_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+e^x}dx$

Exercices : 4

On considère : $I = \int_0^1 \frac{Ln(1+x)}{1+x^2}dx$

1) En utilisant le changement variable $t = \frac{1-x}{1+x}$ Calculer l'intégrale I.

2) Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{Arc\tan x}{1+x}dx$

Bonne Chance