Exercice 1. Maths-inter.ma 1. التمرين

Les parties A et B sont totalement indépendantes

Partie : A

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$

1) Etudier les variations de f.
2)
   a) Montrer que : $(\forall x \in]0,1[)\ ;\ \int_1^x \frac{e^t-1}{t}dt \leq 0$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3) Donner le tableau de variations de f.

Partie : B

On considère la fonction g par : $g(x)=\int_0^x \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}dt$

1) Montrer que g est définie et dérivable sur IR et calculer $g'(x)$, en déduire le sens de variations de g .
2) Montrer que g est impaire.
3)
   a) Montrer que : $(\forall t \in IR^+)\ ;\ \frac{1}{1+2t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.
4)
   a) Montrer que g est une bijection de IR vers IR.
   b) Soit f la fonction réciproque de g, montrer que :
   $(\forall x \in IR)\ ;\ f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+4f^2(x)}$.
   c) En déduire que f est deux fois dérivable sur IR et que :
   $$(\forall x \in IR)\ ;\ f''(x)-f(x)=0$$
5)
   a) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
   b) En déduire $f(x)$ puis $g(x)$ en fonction de x.

Bonne Chance