Exercice .1 Maths-inter.ma 1. التمرين

Partie : I

On considère les fonctions **u** et v définies par :

$$u(x)=1-x+Ln(x) \qquad \text{et} \qquad v(x)=Ln(1+Lnx)-\frac{Lnx}{x}$$

1) Etudier les variations de la fonction **u** , en déduire que
   $(\forall \geq 1)\ ;\ \ 1+Lnx \leq x$
2) Etudier les variations de la fonction **v** , en déduire que
   $(\forall \geq 1)\ ;\ \ v(x)\geq 0$

Partie : II

On considère la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x)=\int_{1+Lnx}^{x}\left(\frac{1}{Lnt}\right)dt & ,\ x>1 \\ F(1)=0 & \end{cases}$$

1)
   a) Soit x un réel tel que $x>1$, montrer que si t est un réel tel que $1+Lnx<t<x$, alors :
   $$\frac{1}{Lnx}<\frac{1}{Lnt}<\frac{1}{Ln(1+Lnx)}$$
   b) En déduire que : $\frac{x-1-Lnx}{Lnx}<F(x)<\frac{x-1-Lnx}{Ln(1+Lnx)}$
   c) Montrer que F est continue à droite au point $x_0=1$.
   d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$
2) Soit G une fonction primitive de la fonction : $t\to\frac{1}{Lnt}$ sur $]1,+\infty[$
   a) Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que : $(\forall x>1)\ ;\ \ F'(x)=\frac{v(x)}{Lnx-Ln(1+Lnx)}$
   b) En déduire le signe de $F'(x)$ (utiliser la question I/2)
   c) On admet que : $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-Lnx}{(x-1)Lnx}=\frac{1}{2}$, montrer que F est dérivable à droite au point $x_0=1$.
   d) Construire (C_F) dans un repère orthonormé.

Bonne Chance