Exercice 1. Maths-inter.ma 1. التمرين

Partie : I

On considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = 1 - e^{-x}$$

1) Etudier les variations de la fonction φ, et tracer (C_φ) dans un repère orthonormé **R** d'unité 2cm.
2) Démontrer que φ est une bijection de IR^+ vers un intervalle **E** à déterminer. Construire la courbe $(C_{\varphi^{-1}})$ dans le même repère **R**.
3) Soit la droite $(\Delta): y = -x + 2$.
   a) Montrer que **Δ** coupe (C_φ) en un point unique **A** d'abscisse **α >1**.
   b) Soit **D** la zone du plan limitée par (C_φ) et $(C_{\varphi^{-1}})$ et **Δ.**
   Calculer la surface de la zone **D** en fonction de **α** et vérifier que cette surface est égale à : $(2-\alpha^2)\times 4cm^2$

Partie : II

On considère la fonction f définie de IR vers IR par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}} \quad \text{et soit} \quad I = \int_0^1 f(x)dx$$

1) Montrer que : $(\forall x \in IR)$; $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$
2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3) Montrer que : $(\forall x \in IR^+)$; $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$, en déduire un encadrement de **I.**

Partie : III

Pour tout entier non nul n, on pose :

$$J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}.dx$$

1)
   a) Calculer J_1.
   b) Montrer en utilisant une intégration par parties que : $J_2 = \frac{1}{4}(1 - \frac{5}{e^2})$
2) On pose pour tout entier non nul n :

$$U_n = 1 + J_1 + J_2 + ... + J_n$$

   a) Montrer que : $(\forall x \in IR)$; $1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + ... + x^ne^{-nx} = \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}$
   b) En déduire que : $I - U_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x)dx$
   c) Montrer que : $(\forall x \in IR^+)$; $0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x}f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$
   d) Montrer que la suite (U_n) est convergente en déterminant sa limite.

Partie : IV

On considère la fonction g définie sur IR^+ par : $\begin{cases} g(t) = f(Lnt) & ; \quad t \succ 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ et soit $F(x) = \int_1^x g(t)dt$

1) Justifier l'existence de $F(x)$ sur $[0,+\infty[$
2) Montrer que **F** est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$
3)
   a) Montrer que : $(\forall t \succ 0)$; $\dfrac{t}{t-\text{Ln}(t)} \leq t$
   b) Montrer que : $(\forall x \in]0,1[)$; $\dfrac{x^2-1}{2} \leq F(x) \leq 0$
4) Montrer que : $(\forall t \in [1,+\infty[)$; $1+\dfrac{\text{Ln}(t)}{t} \leq \dfrac{t}{t-\text{Ln}(t)} \leq 1+\text{Ln}(t)$
5) Encadrer $F(x)$ pour tout x de $[1,+\infty[$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

Exercice 2. Maths-inter.ma **2.** التمرين

On considère la fonction f définie sur IR^+ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x-\text{Ln}x} & ; \quad x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

4) Vérifier que f est continue à droite de 0 et étudier la dérivabilité à droite de ce point.
5) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
6) Etudier les variations de f sur IR^+ et tracer sa courbe (C_f) dans un repère orthonormé.
7) On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

et On pose, pour tout $x \geq 1$; $I(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}dt$

   e) Soit $0 < x < \dfrac{1}{2}$, montrer que $xf(x) \leq F(x) \leq xf(2x)$ en déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.
   f) Montrer que pour tout $x \geq 1$: $f(2x)\text{Ln}2 \leq I(x) \leq f(x)\text{Ln}2$ en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x)$.
   g) Montrer que pour tout $x \geq 1$: $F(x) - I(x) = \text{Ln}\left(1+\dfrac{x-\text{Ln}2}{x-\text{Ln}x}\right)$ en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
8) Soit $\alpha \geq 1$ et $A(\alpha)$ la surface de la zone plane limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 2\alpha$ déterminer la valeur de $\boldsymbol{\alpha \geq 1}$ pour que la surface $A(\alpha)$ soit maximale.

Bonne Chance