Exercice 1. Maths-inter.ma 1. التمرين

Partie : I

Soit f une fonction continue sur IR et u et v deux fonctions dérivables sur IR. On considère la fonction G définie par : $G(x)=\int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt$

1) Montrer que G est dérivable sur IR.
2) Donner l'expression de $G'(x)$

Partie : II

Soient f et F deux fonctions définies sur IR par :

$$f(x)=x^4e^{-4x^4} \quad \text{et} \quad F(x)=\int_x^{1+x^2} f(t)dt$$

et On pose, pour tout $x\geq 1$; $I(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt$

1)
   a) Montrer qu'il est possible de réduire le domaine de définition de F à un intervalle d'étude D_E et étudier les variations de F sur D_E .
   b) En déduire que pour tout x réel :

$$(\forall x\in \mathbb{R}) \quad ; \quad f(x)\leq \frac{1}{4e}$$

2)
   a) Calculer l'expression de la fonction dérivée $F'(x)$
   b) En déduire que : $(\forall x\in[0,1]) \quad ; \quad |F'(x)|\leq \frac{3}{4e}$
3) Montrer que : $(\forall x\in[0,1]) \quad ; \quad 0\leq F(x)\leq 1$
4) Montrer qu'il existe un réel $x_0\in]0,1[\quad ; \quad F(x_0)=x_0$
5) Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=F(U_n)\end{cases}$
   a) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad ; \quad U_n\in[0,1]$
   b) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N}) \quad ; \quad |U_{n+1}-x_0|\leq \frac{3}{4e}|U_n-x_0|$
   c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Bonne Chance