Les parties A et B et C et D sont totalement indépendantes

Partie : A

1) On considère l'intégrale : $U_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

On se propose de calculer l'intégrale U_1 par deux méthodes différentes.

a) **Première méthode** :

i. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{1-x}$, montrer que $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx = \frac{16}{4}$

ii. En utilisant une intégration par parties, montrer que $U_1 = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$, en déduire U_1.

b) **Deuxième méthode** :

i. Montrer que $U_1 = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{3/2}dx$

ii. En déduire U_1.

2) On pose pour tout entier non nul n $U_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$

a) Montrer que $U_n = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}dx$

En déduire que $U_n = \frac{2n}{2n+3}U_{n-1}$

b) Montrer alors que pour tout n non nul :

$$U_n = \frac{2^{n+1}.n!}{3\times 5\times \ldots \times (2n+3)}$$

Partie : B

On considère la fonction **f** définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x.Ln(x) & ; \quad x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit k un entier naturel non nul fixe, on considère la suite (I_n) définie par :

$$\begin{cases} I_0 = \int_0^1 x^k dx \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad I_n = \int_0^1 x^k (Lnx)^n dx \end{cases}$$

1) Calculer I_0.

a) Montrer que : $\forall n \in \{1,2,3,\ldots,k\}$; $I_n = \frac{-n}{k+1}I_{n-1}$

b) En déduire que : $\forall n \in \{1,2,3,\ldots,k\}$; $I_n = \frac{(-1)^n.n!}{(k+1)^{n+1}}$

2) Soit n un entier naturel non nul, calculer $A_n = \int_0^1 \frac{(f(x))^n}{n!}dx$

Partie : C

on considère la suite (J_n) définie par :

$$\begin{cases} J_0 = \int_1^e x\,dx \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad J_n = \int_1^e x(Lnx)^n\,dx \end{cases}$$

1)

a) Calculer J_0 et J_1 .

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad 2.J_n + n.J_{n+1} = e^2$

c) Calculer J_2 et J_3 .

2)

a) Montrer que lq suite (J_n) est décroissante .

b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \frac{e^2}{n+3} \leq J_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n.J_n$.

Partie : D

on considère la suite (K_n) définie par :

$$K_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

1) Calculer K_0 .

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad (2n+1).K_n = \sqrt{2} - 2n.K_{n-1}$$

3) En déduire les valeurs K_1 et K_2 et K_3 .

Bonne Chance