Exercice 1 $(16\,pts)$

Première partie:

Soit $E=\left\{M_{(x)}=\begin{pmatrix} x & x \\ x & x\end{pmatrix}; x\in\mathbb{R}\right\}$.

$1)$ Montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif. $(2\,pts)$

$2)$ Montrer que E est une partie stable dans $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$. $(2\,pts)$

$3)$ Montrer que $(E,+,\times)$ un anneau commutatif. $(2\,pts)$

$4)$ Montrer que $(E,\times)$ admet un élément neutre à déterminer. $(2\,pts)$

$5)$ Montre que $\forall x\in\mathbb{R}^*; M_{(x)}\times M_{\left(\frac{1}{4x}\right)}=M_{\left(\frac{1}{2}\right)}$. $(1\,pt)$

$6)$ en déduire que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif. $(2\,pts)$

Deuxième partie:

Soit φ l'application de $E\setminus\left\{M_{(0)}\right\}$ Vers $\mathbb{R}^*$ définie par : $\varphi\left(M_{(x)}\right)=2x$.

$1)$ Montre que φ est un isomorphisme de $\left(E\setminus M_{(0)},\times\right)$ vers $(\mathbb{R}^*,\times)$. $(1\,pt)$

$2)$ Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*; \left(M_{(x)}\right)^n=M_{\left(2^{n-1}x^n\right)}$. $(2\,pts)$

$3)$ Résoudre dans E l'équation $X^{2013}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. $(2\,pts)$

Exercice 2 $(4\,pts)$

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt$.

$1)$ déterminer le signe de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et de $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$. $(1\,pt)$

$2)$ Montrer que $\forall x>0, \left|F(x)\right|\le \ln 3$. $(1\,pt)$

$3)$ Etudier la parité de F. $(1\,pt)$

$4)$ calculer $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$. $(1\,pt)$