

التمرين الاول (8pts)

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty, 1[$ ب: $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}; x < 1 \text{ و } x \neq 0$ و C_f مبياتها في معلم متعامد ممنظم $f(0) = -1$

(1) بين ان f متصلة عند 0. (0,5pt)

(2) لتكن φ_a الدالة المعرفة على $]-\infty, 1[$ ب $\varphi_a(x) = (a + \ln(1-a))x^2 - (x + \ln(1-x))a^2$ حيث $a \in]-\infty, 1[$ احسب $\varphi_a(0)$ و $\varphi_a(a)$. (0,5pt)

(ب) استنتج انه يوجد c محصور بين 0 و a بحيث $\frac{a + \ln(1-a)}{a^2} = \frac{1}{2(c-1)}$. (1,5pt)

(ج) استنتج ان f قابلة للاشتقاق عند 0 وان $f'(0) = \frac{-1}{2}$. (1pt)

(3) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty, 1[$ ب: $g(x) = (x-1)\ln(1-x) - x$

(أ) بين ان $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1-x)}$ $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. (1pt)

(ب) ادرس اشارة $g(x)$ ثم ضع جدولا لتغيرات الدالة f . (1,5pt)

(4) ادرس الفرعين اللانهائين ل C_f . (1pt)

(ب) انشئ C_f مبرزا المماس عند 0. (1pt)

التمرين الثاني (6pts)

$$E = \left\{ M_{(x,y)} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\} \text{ نضع}$$

(1) بين ان $M_{(x,y)} \times M_{(a,b)} = M_{\left(xa, xb + \frac{y}{a}\right)}$ $\forall (M_{(x,y)}, M_{(a,b)}) \in E^2$. ماذا تستنتج؟ (1,5pt)

(ب) بين ان $M_{(x,y)} \times M_{\left(\frac{1}{x}, -y\right)} = M_{\left(\frac{1}{x}, -y\right)} \times M_{(x,y)} = M_{(1,0)}$ $\forall M_{(x,y)} \in E$. ماذا تستنتج؟ (1,5pt)

(ج) استنتج ان (E, \times) زمرة. (1pt). هل (E, \times) زمرة تبادلية؟ (0,5pt)

(2) ليكن $*$ قانون تركيب داخلي معرف على $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ بمايلي: $(x,y) * (a,b) = \left(xa, xb + \frac{y}{a}\right)$

و التطبيق المعرف من E نحو $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ كما يلي $f(M_{(x,y)}) = (x,y)$

(أ) بين ان f تشاكل تقابلي من (E, \times) نحو $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$. (1,5pt)

(ب) استنتج بنية $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$. (0,5pt)

التمرين الثالث (6pts)

$$\text{نضع } \left(\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx \right)$$

(1) احسب u_1 . (1pt)

(2) بين ان $(u_n)_{n>0}$ تناقصية و مصغورة ثم استنتج انها متقاربة. (1,5pt)

(3) بين ان $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*; u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n \right)$. (1,5pt)

(4) بين ان $\left(\forall n > 1; \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1} \right)$ ثم حدد $\lim u_n$ و $\lim nu_n$. (2pts)

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty, 1[$ ب: $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}; x < 1$ و $x \neq 0$ و C_f ميانها في معلم متعامد ممنظم

- (1) بين ان f متصلة عند 0. (0,5pt)
- (2) لتكن φ_a الدالة المعرفة على $]-\infty, 1[$ ب $\varphi_a(x) = (a + \ln(1-a))x^2 - (x + \ln(1-x))a^2$ حيث $a \in]-\infty, 1[$ احسب $\varphi_a(0)$ و $\varphi_a(a)$. (0,5pt)

(ب) استنتج انه يوجد c محصور بين 0 و a بحيث $\frac{\ln(1-a)+a}{a^2} = \frac{1}{2(c-1)}$. (1,5pt)

(ج) استنتج ان f قابلة للاشتقاق عند 0 وان $f'(0) = \frac{-1}{2}$. (1pt)

(3) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty, 1[$ ب: $g(x) = (x-1)\ln(1-x) - x$

(أ) بين ان $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1-x)}$ $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. (1pt)

(ب) ادرس اشارة $g(x)$ ثم ضع جدولا لتغيرات الدالة f . (1,5pt)

(4) (أ) ادرس الفرعين اللانهائيين ل C_f . (1pt)

(ب) انشئ C_f مبرزا المماس عند 0. (1pt)

2008

التمرين الثاني (6pts) نضع $E = \left\{ M_{(x,y)} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$

- (1) (أ) بين ان $M_{(x,y)} \times M_{(a,b)} = M_{(xa, xb + \frac{y}{a})}$ $\forall (M_{(x,y)}, M_{(a,b)}) \in E^2$. ماذا تستنتج؟ (1pt)
- (ب) بين ان $M_{(x,y)} \times M_{(\frac{1}{x}, -y)} = M_{(\frac{1}{x}, -y)} \times M_{(x,y)} = M_{(1,0)}$ $\forall M_{(x,y)} \in E$. ماذا تستنتج؟ (1pt)
- (ج) استنتج ان (E, \times) زمرة. (1pt). هل (E, \times) زمرة تبادلية؟ (0,5pt)

(2) ليكن $*$ قانون تركيب داخلي معرف على $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ بما يلي: $(x,y) * (a,b) = \left(xa, xb + \frac{y}{b} \right)$

و التطبيق المعرف من E نحو $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ كما يلي $f(M_{(x,y)}) = (x,y)$

(أ) بين ان f تشاكل تقابلي من (E, \times) نحو $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$. (1,5pt)

(ب) استنتج بنية $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, *)$. (1pt)

2009

التمرين الثالث (6pts)

نضع $(\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = \int_1^e x(1-\ln x)^n)$

(1) احسب u_1 . (1pt)

(2) بين ان $(u_n)_{n>0}$ تناقصية و مصغورة ثم استنتج انها متقاربة. (1,5pt)

(3) بين ان $(\forall n \in \mathbb{N}^*; u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n)$. (1,5pt)

(4) بين ان $(\forall n > 1; \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1})$ ثم حدد $\lim u_n$ و $\lim nu_n$. (2pts)

2009