التمرين الأول

1) ليكن هو كون الإمكانيات المرتبط بهذه التجربة.

العدد الإجمالي للإمكانيات هو : $card(\Omega)=C_{10}^2\times C_{10}^2=45^2=2025$

2) احتمال الحدث A هو $p(A)=\dfrac{C_{10}^2\times C_8^2}{C_{10}^2\times C_{10}^2}=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45}$

$$\boxed{p(A)=\frac{28}{45}}$$

3) أ) القيم الممكنة ل X : $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

ب) $p(X=2)=\dfrac{C_1^1\times C_9^1\times C_1^1\times C_9^1}{45\times 45}=\dfrac{1}{25}=0,04$

ج) لدينا $p(X=0)=\dfrac{C_9^2\times C_9^2}{45\times 45}=\dfrac{16}{25}$ و $p(X=1)=\dfrac{2C_1^1\times C_9^1\times C_9^2}{45\times 45}=\dfrac{8}{25}$

و منه قانون احتمال X كما يلي

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

4) الأمل الرياضي ل X : $E(X)=\dfrac{0\times 16+1\times 8+2\times 1}{25}=\dfrac{2}{5}$

مغايرة X : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{8+4}{25}-\dfrac{4}{25}=\dfrac{8}{25}$

الانحراف الطرازي ل X : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ د

5) أ) ليكن B الحدث " تحقق الحدث A مرة على الأقل خلال هذه التجارب"

الحدث المضاد ل B هو $\overline{B}$ "لم يتحقق الحدث A خلال هذه التجارب"

لدينا : $p_n=p(B)=1-p(\overline{B})=1-\left(p(\overline{A})\right)^n=1-\left(\dfrac{17}{45}\right)^n$

ب) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{17}{25}\right)=0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=1$

ج) أقل عدد ممكن من المرات التي يجب فيها القيام بهذه التجربة كي يكون احتمال تحقق الحدث A على الاقل مرة أكبر قطعا من $\dfrac{2012}{2013}$:

لدينا

$$p_n>\frac{2012}{2013}\Leftrightarrow 1-\left(\frac{17}{45}\right)^n>\frac{2012}{2013}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2013}>\left(\frac{17}{45}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow -\ln(2013)>n\ln\frac{17}{45}$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{\ln 2013}{\ln\frac{45}{17}}$$

العدد المطلوب هو إذن : $1+\left[\dfrac{\ln 2013}{\ln 45-\ln 17}\right]$ أي 8
أقل عدد ممكن من المرات التي يجب فيها القيام بهذه التجربة كي يكون احتمال تحقق الحدث A على الاقل مرة أكبر قطعا من $\dfrac{2012}{2013}$ هو 8

التمرين الثاني:

1) أ) بتعويض z ب 1 في (E) نجد $i(m-2)=0$ و بما أن $|m|=1$ فإن $m\neq 2$ و منه 1 ليس حلا ل (E).

ب) لدينا $(m-1)^2-(i+m)(m-1)+(1+i)(m-1)=(m-1)(m-1-i-m+1+i)=0$
إذن $m-1$ حل ل (E)

ج) ليكن z_2 الحل الاخر لدينا $z_2+(m-1)=i+m$ و منه $z_2=1+i$
مجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{m-1,1+i\}$.

2) لدينا $m-1=e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$
و بما أن $\theta\in\left]0,2\pi\right]$ فأن $\frac{\theta}{2}\in\left]0,\pi\right]$ و منه $\sin\frac{\theta}{2}\geq 0$
إذا كان $\theta\in\left]0,2\pi\right[$ فإن $m-1=\left[2\sin\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right]$ و إذا كان $\theta=2\pi$ فإن $m-1=0$ ليس له شكل مثلثي .

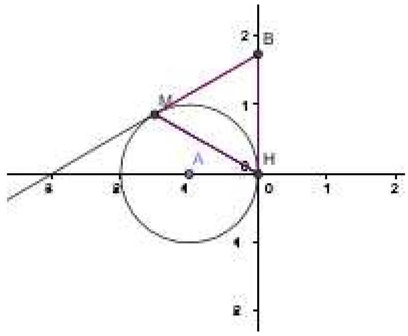
3) أ) لدينا $|m|=1\Leftrightarrow |(m-1)-(-1)|=1\Leftrightarrow AM=1$
إذن مجموعة النقط M عندما يتغير θ على $\left]-\pi,\pi\right]$ هي الدائرة ذات المركز $A(-1,0)$ و الشعاع 1

ب) (BM) مماس ل (C) $\Leftrightarrow (BM)\perp(AM)$

$$\Leftrightarrow \arg\frac{m-1-i\sqrt{3}}{m}\equiv\frac{\pi}{2}(\pi)$$
$$\Leftrightarrow \frac{m-1-i\sqrt{3}}{m}=-\frac{\overline{m}-1+i\sqrt{3}}{\overline{m}}$$
$$\Leftrightarrow 2m\overline{m}-m-\overline{m}+i\sqrt{3}\left(m-\overline{m}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2-2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\theta-\frac{\pi}{3}\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\\ \text{أو}\\ \theta-\frac{\pi}{3}\equiv-\frac{\pi}{3}(2\pi)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\theta\equiv 0(2\pi)\\ \text{أو}\\ \theta\equiv\frac{2\pi}{3}(2\pi)\end{cases}$$

و بما أن $\theta\in\left]-\pi,\pi\right]$ فإن قيم θ التي يكون من أجلها المستقيم (BM) مماس للدائرة (C) هي 0 و $\frac{2\pi}{3}$.

4) إنشاء الشكل في حالة $\theta=\frac{2\pi}{3}$



لدينا $\left[1,\frac{\pi}{3}\right]=\frac{\left[2\sin\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right]}{\left[\sqrt{3},\frac{\pi}{2}\right]}=\frac{m-1}{i\sqrt{3}-0}$ إذن $\frac{OM}{OB}=1$ و $\overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right)}\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)$

نستنتج أن المثلث OMB متساوي الأضلاع

التمرين الثالث

1) أ) $J^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 2\end{pmatrix}=-I+\sqrt{3}J\in E$

ب) لنبين أن E جزء مستقر من $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$:

لدينا $\forall\left(M(x,y),M(a,b)\right)\in E^2; M(x,y)\times M(a,b)=(xI+yJ)\times(aI+bJ)$

$$=axI+bxJ+ayJ+byJ^2$$
$$=axI+bxJ+ayJ+by\left(-I+\sqrt{3}J\right)$$
$$=(ax-by)I+\left(ay+bx+by\sqrt{3}\right)J$$
$$=M\left(ax-by,ay+bx+by\sqrt{3}\right)\in E$$

إذن E جزء مستقر من $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$

2) أ) لنبين أن h تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

لدينا من جهة $\forall\left(M(x,y),M(a,b)\right)\in E^2, h\left(M(x,y)\times M(a,b)\right)=h\left(M\left(ax-by,ay+bx+by\sqrt{3}\right)\right)$

$$=ax-by+\left(ay+bx+by\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$$

و من جهة أخرى: $h\left(M(x,y)\right)\times h\left(M(a,b)\right)=\left(x+ye^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(a+be^{i\frac{\pi}{6}}\right)$

$$=ax+bye^{i\frac{\pi}{3}}+(ay+bx)e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$=ax+by\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}-1\right)+(ay+bx)e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$=ax-by+\left(ay+bx+by\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$$

نستنتج أن : $\forall\left(M(x,y),M(a,b)\right)\in E^2, h\left(M(x,y)\times M(a,b)\right)=h\left(M(x,y)\right)\times h\left(M(a,b)\right)$

ومنه h تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

لنبين أن h تقابل من E نحو $\mathbb{C}$

$$\forall z\in\mathbb{C},\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2 / z=a+bi$$

لنبين أن ل z سابق وحيد ب h :

$$h\left(M\left(x,y\right)\right)=z\Leftrightarrow x+ye^{i\frac{\pi}{6}}=a+bi$$
$$\Leftrightarrow x+y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=a+bi$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\\ i\dfrac{y}{2}=ib\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-b\sqrt{3}\\ y=2b\end{cases}$$

ومنه ل $z=a+bi$ سابق وحيد ب هو المصفوفة $M\left(a-b\sqrt{3},2b\right)$ إذن h تقابل من E نحو $\mathbb{C}$

نستنتج أن h تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$.

ب) بما أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية و h تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$ فإن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

ج) لدينا

$$\frac{1}{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}=\frac{1+e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\left|1+e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}{2+\sqrt{3}}=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-2\right)\ e^{i\frac{\pi}{6}}$$

إذن $\dfrac{1}{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}=\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-2\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$

3) لدينا $h\left(M\left(1,1\right)\right)=1+e^{i\frac{\pi}{6}}$ إذن $h\left(\left(M\left(1,1\right)\right)^{-1}\right)=\dfrac{1}{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}$

و منه $\left(M\left(1,1\right)\right)^{-1}=h^{-1}\left(\dfrac{1}{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)=h^{-1}\left(\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-2\right)e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=M\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-2\right)$

مقلوب المصفوفة $M\left(1,1\right)$ هو المصفوفة $M\left(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-2\right)$

مرحب بملاحظاتكم عبر العنوان : y_mghazli@hotmail.com