

التمرين الاول (7 pts)

(1) أ) حدد باقي القسمة الاقليدية للعدد 2011^4 على 16. (1 pt)

ب) استنتج ان $2011^{8001} \equiv 2011 [16]$. (0,5 pt)

(2) لتكن المتتالية المعرفة بما يلي: $u_0 = 2011^4 - 1$ و $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (1 pt)

أ) تحقق ان: $u_0 \equiv 0 [5]$ وان: $u_{n+1} = u_n (u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1))$. (1 pt)

ب) بين ان: $u_n \equiv 0 [5^{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (1 pt)

ج) استنتج ان: $2011^{500} \equiv 1 [625]$ وان: $2011^{8001} \equiv 2011 [625]$. (1 pt)

3) بين ان: $2011^{8001} \equiv 2011 [10000]$. (0,5 pt)

4) حدد عددا صحيحا طبعيا ينتهي مكعبه بالعدد 2011. (1 pt)

التمرين الثاني (6 pts)

لكل x و y من $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ نضع $x * y = x + y - 2xy$.

1) بين ان $*$ قانون تركيب داخلي في E . (1 pt)

2) بين ان القانون $*$ تبادلي و تجميعي في E . (1 pt)

3) حدد العنصر المحايد في $(E, *)$. (1 pt)

4) بين ان جميع عناصر E تقبل مماثلا تحده. (1 pt)

5) بين ان: $\left(\forall x \in E; \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}; \underbrace{x * x * \dots * x}_n = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^n] \right)$. (1 pt)

6) حل في E المعادلة: $x * x * x * x = \frac{-65}{32}$. (1 pt)

التمرين الثالث (4 pts)

المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

نضع $z_A = e^{i\theta}$ $z_B = -i + e^{i\theta}$ و $C = r(A)$ حيث θ من $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$ و r الدوران الذي مركزه $\Omega \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

1) تحقق ان: $z_C = 1 - ie^{i\theta}$. (1 pt) 2) بين ان النقط A و B و C غير مستقيمة. (1 pt)

3) بين ان: $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \cos \theta + \sin \theta = 1$. (1 pt)

4) استنتج قيمة θ بحيث تكون النقط Ω و A و B و C متداورة ثم انشئها في هذه الحالة. (1 pt)

التمرين الثالث (3 pts)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

1) بين ان (u_n) تناقصية و مصغورة ثم استنتج انها متقاربة. (1 pt)

2) بين ان: $\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = 2u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (1 pt)

3) بين ان: $\forall n \geq 2; nu_n = (n - 1)u_{n-2}$. (1 pt)

