2 بكالوريا علوم رياضية	فرض محروس رقم 02	ثانوية موسى بن نصير
مدة الانجاز : أربع ساعات	الدورة الثانية 2015/2014	نيابة الخميسات
ذ : عبدالله بن لختير		

■ التمرين رقم 01: (3,5 نقطة)

⇦ ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، نضع : $A_n=(n!)^2+1$.

1)- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right);A_n\equiv 1[2]$. 0,25

2)- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$، A_n يقبل قاسما أوليا p_n بحيث : $p_n\succ n$. 0,75

3)- نفترض أن لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$: $p_n\equiv 3[4]$ و ليكن k من $\mathbb{N}$ بحيث : $p_n=4k+3$.

✓ بين أن : $A_n/1+(n!)^{2(2k+1)}$ وأن : $p_n/(n!)+(n!)^{p_n}$. 0,75

4)- إستنتج أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right);p_n\equiv 1[4]$. 0,75

5)- بين أنه توجد ما لانهاية من الأعداد الأولية الموجبة على شكل : $4k+1$ ، حيث $k\in\mathbb{N}^*$. 1

■ التمرين رقم 02: (6,5 نقطة)

I-1)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، المعادلة :

$$(E):148x-97y=1 .$$

أ- باستعمال خوارزمية أقليدس بين أن $(-19,-29)$ حل خاص للمعادلة (E) . 0,5

ب- حل المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل . 0,5

ج- حل في المجموعة $\mathbb{Z}/148\mathbb{Z}$ المعادلة : $(F):\overline{97}\times u=\overline{1}$. 0,5

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases}n\equiv 2[4]\\ n\equiv 6[37]\\ n\equiv 7[97]\end{cases}$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{Z});\begin{cases}n\equiv 2[4]\\ n\equiv 6[37]\end{cases}\Leftrightarrow n\equiv 6[148]$. 0,5

ب- إستنتج مجموعة حلول النظمة (S) (يمكنك إستعمال السؤال **1**)-ب-) . 1

II- لكل عنصر n من المجموعة $A=\{2,3,4,\dots,148\}$ ، نضع : $S(n)=\sum_{k=0}^{147}n^k$.

1)- تحقق من أن 149 عدد أولي . 0,5

2)- أ- بين أن : $(\forall n\in A);n^{148}\equiv 1[149]$. 0,75

ب- إستنتج أن 149 يقسم $S(n)$ لكل n من A . 0,75

3)- أ- باستعمال مبرهنة بوزو ، بين أن : $(\forall n\in A);n^{148}\wedge(n-1)=1$. 0,5

ب- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، المعادلة : $(E_n):n^{148}x+(1-n)y=n$ مبرزا مراحل الحل . 1

■ **التمرين رقم 03:** (3,75 نقطة)

⇦ في $\mathrm{IM}_2(\mathbb{R})$ نعتبر المجموعة الجزئية :

$$G=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix};(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$ ، حيث $k\in\mathbb{R}$.

1)- بين أن G جزء مستقر من $(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times)$. 0,5

2)- نفترض أن : $k\prec 0$ ، و نضع : $\omega=i\sqrt{-k}$.

أ- بين أنه : $(\forall z\in\mathbb{C})\ (\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2);\ z=a+\omega b$. 0,5

ب- نعتبر التطبيق h المعرف من $\mathbb{C}$ نحو G بما يلي : $h(z)=h(a+\omega b)=M(a,b)$.

✓ بين أن h تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(G,\times)$. 0,75

ج- إستنتج بنية $(G^*,\times)$ ، ثم حدد مقلوب كل مصفوفة $M(a,b)$ من G^* . 0,75

د- نعتبر المصفوفة : $A=M\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{-k}}\right)$ ، أحسب A^n لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$. 0,75

3)- نفترض أن : $k\geq 0$.

✓ أحسب $M(\sqrt{k},1)\times M(-\sqrt{k},1)$ ، هل G^* جزء مستقر من $(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times)$ ؟ 0,5

■ **التمرين رقم 04:** (6,25 نقطة)

⇦ في المجال $G=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ نعرف قانون التركيب الداخلي * كما يلي :

$$(\forall(x,y)\in G\times G);x*y=\mathrm{Arctan}(-1+\tan x+\tan y)$$.

1)- بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية . 1,25

2)- لكل x من G ، نضع : $f(x)=-1+\tan x$.

أ- بين أن f تقابل من G نحو $\mathbb{R}$ و حدد تقابله العكسي f^{-1} . 0,75

ب- بين أن f^{-1} تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(G,*)$ ، ثم إستنتج مرة أخرى بنية $(G,*)$. 1

3)- لكل x من G ، نضع : $x^{(n)}=\underbrace{x*x*....*x}_{n\ fois}$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);x^{(n)}=\mathrm{Arctan}(1-n+n\tan x)$. 0,5

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة : $(E):x^{(n)}=-x^3$ تقبل حلا وحيدا α_n في G . 1

ج- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);0\leq\alpha_n\prec\dfrac{\pi}{4}$. 0,5

د- أدرس رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، ثم إستنتج أنها متقاربة و أحسب نهايتها . 1,25

■ تمارين إضافية :

■ **تمرين رقم 01:**

⇦ $E(x)$ يرمز إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});E\left(\sqrt[3]{7n+2}\right)=E\left(\sqrt[3]{7n+3}\right)$.

✓ بين أن : $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\right);a\wedge b=a+b-ab+2\times\sum_{k=0}^{b-1}E\left(k\frac{a}{b}\right)$.

■ **تمرين رقم 02:**

✓ بكم من صفر تنتهي كتابة العدد $N=100!$ في نظمة العد العشري ؟

✓ ليكن p من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ بحيث : $(p-1)!\equiv-1[p]$ ، بين أن p عدد أولي .

■ **تمرين رقم 03:**

⇦ نعرف في $\mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي * كما يلي :

$\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right);a*b=a+b+\sin(\pi ab)$.

1)- أ- بين أن * تبادلي في $\mathbb{R}$.

ب- بين أن * يقبل عنصرا محايدا في $\mathbb{R}$ ينبغي تحديده .

2)- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=x+1+\sin(\pi x)$.

أ- بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{-1}{2},0\right[$.

ب- أحسب $f(-1)$ ، هل القانون * تجميعي في $\mathbb{R}$ ؟ علل جوابك .

■ **تمرين رقم 04:**

⇦ ليكن (a,b) من $\mathbb{N}^*-\{1\}\times\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، بحيث :

$(\forall n\in\mathbb{N});(a^n+n)/(b^n+n)$

نفترض أن : $a\neq b$ و ليكن p عددا أوليا موجبا بحيث : $(a-b)\wedge p=1$.

1)- أ- تحقق من أن : $m=a(p-1)+p$ حل في $\mathbb{N}^*$ للنظمة : $(S):\begin{cases}x\equiv-a[p]\\x\equiv1[p-1]\end{cases}$.

ب- إستنتج أن مجموعة حلول النظمة (S) في $\mathbb{Z}$ هي : $S=\{m+kp(p-1)/k\in\mathbb{Z}\}$.

2)- أ- بين أن : $a\wedge p=1$.

ب- باستعمال مبرهنة فيرما ، بين أن : $a^m+m\equiv0[p]$.

ج- أثبت أن : $b^m+m\equiv b-a[p]$.

3)- ماذا تستنتج ؟ علل جوابك .

✓ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة :