ثانوية موسى بن نصير مديرية الخميسات	فرض محروس رقم 01 الدورة الثانية 2017/2016	2 بكالوريا علوم رياضية مدة الانجاز : أربع ساعات ذ : عبدالله بن الختير

○ تمرين رقم 01: (4,5)

⇦ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$m \in \mathbb{C}^*$ حيث ، $(E): \frac{1}{m}z^2 + (1-3i)z - 4m = 0$.

1)- أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $a = 8-6i$. (0,5)

ب- حدد بدلالة m الحلين z_1 و z_2 للمعادلة (E) بحيث : $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right) < 0$. (0,5)

ج- نضع : $\theta \equiv \arg(m)[2\pi]$ ، أحسب بدلالة θ كلا من $\arg(z_1)$ و $\arg(z_2)$. (0,75)

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط M_1 و M_2 و M و D التي ألحاقها على التوالي هي : z_1 و z_2 و m و $z_D = 1+3i$.

أ- بين أن المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O . (0,25)

ب- حدد مجموعة النقط M ذات اللحق m بحيث تكون النقط O و M و D مستقيمية . (0,5)

ج- حدد مجموعة النقط M ذات اللحق m بحيث يكون المثلث ODM قائم الزاوية في O . (0,5)

3)- النقطة M_1' هي صورة M_1 بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و النقطة M_2' هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{2}$.

أ- بين أن النقط M_1 و M_2 و M_1' و M_2' متداورة . (0,75)

ب- حدد بدلالة m لحق النقطة Ω مركز الدائرة (Γ) المارة من M_1 و M_2 و M_1' و M_2' . (0,75)

○ تمرين رقم 02: (3,5)

⇦ المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ و ليكن R التحويل الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z' = iz + (1+i)$.

1)- أ- بين أن R دوران محددا لحق مركزه و قياسا لزاويته . (0,5)

ب- اكتب التمثيل العقدي للدوران العكسي R^{-1} للدوران R . (0,5)

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(F): iz^3 + 3(1+i)z^2 + 6z + 10 - 2i = 0$.

أ- بين أن عددا عقديا z يكون حلا للمعادلة (F) إذا و فقط إذا كان : $(z')^3 = 8$. (0,75)

ب- استنتج مجموعة حلول المعادلة (F) . لتكن A و B و C صورها في المستوى العقدي . (0,75)

ج- بين أن مجموعة النقط $M(z)$ من (P) بحيث : $|iz + (1+i)| = 2$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أرسم المثلث ABC و الدائرة المحيطة به . (1)

○ تمرين رقم 03: (05)

⇦ لتكن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k}$ ، حيث $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1)- بين أن : $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}dx = \frac{\pi - \theta}{2\sin\theta}$. (1)

2)- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، بين أن : $(\forall x \in [0,1]), \frac{1}{1-xe^{i\theta}} = \frac{x^n e^{in\theta}}{1-xe^{i\theta}} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k e^{ik\theta}$. (1)

3)- بين أن : $(\forall x \in [0,1]), \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\right) = \frac{\sin\theta}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}$. (0,75)

4)- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \frac{\pi - \theta}{2} - \int_0^1 \frac{x^n\left[(\sin(n+1)\theta) - x\sin(n\theta)\right]}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}dx$. (1)

5)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \left|\int_0^1 \frac{x^n\left[(\sin(n+1)\theta) - x\sin(n\theta)\right]}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}dx\right| \leq \frac{2}{(n+1)\sin^2(\theta)}$. (0,75)

6)- استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها . (0,5)

○ تمرين رقم 04: (07)

⇦ في كل ما يلي المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ و الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$(E_\theta): z^2 - 2iz - (1 + e^{2i\theta}) = 0$ ، حيث $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1)- ليكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، بين أن :

$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$ و $e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$. (1)

2)- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ) ، ثم أكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . (1)

3)- لتكن A و B النقطتان اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2 .

أ- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية و أن المثلث OAB قائم الزاوية . (0,75)

ب- ما هي قيم البارامتر θ التي لأجلها يكون المثلث OAB متساوي الساقين ؟ (0,5)

II- نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $b+i$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

و ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و النقطة B' هي صورة B بالدوران .

1)- أعط التمثيل العقدي للدوران r ، ثم عبر عن $aff(B')$ بدلالة a و b . **1**

2)- بين أن : $B'\in(Oy) \Leftrightarrow a+b=\sqrt{3}$ ، ثم عبر في هذه الحالة عن $aff(B')$ بدلالة a . **1**

3)- نفترض فيما يلي أن : $a=\sqrt{3}$ و $b=0$.

و لتكن C و D النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي : $c=-i$ و $d=2+\sqrt{3}(1-2i)$.

أ- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟ احسب $\frac{d-a}{c-a}$ و استنتج طبيعة المثلث ADC . **0,75**

ب- نضع : $E=r(D)$ و لتكن F صورة النقطة D بالازاحة المتجهة $\overrightarrow{AC}$.

✓ أحسب كلا من $aff(E)$ و $aff(F)$ ، ثم بين أن المثلث BEF متساوي الأضلاع . **1**

○ تمرين رقم 05:

⇦ في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A(1)$ و $B(-1)$ و $C(i)$ و نربط كل نقطة $M(z)$ من (P) مختلفة عن $B(-1)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{z-1}{z+1}$.

1)- حدد مجموعة النقط $M(z)$ من (P) التي يكون لأجلها : $M'(z')\in(Oy)$.

2)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(G): z^2-2ze^{i\theta}+1=0$ ، حيث $\theta\in]0,\pi[$.

أ- حدد على الشكل الأسي الجذرين المربعين للعدد العقدي $a=e^{i\theta}-1$.

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (G) .

3)- نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي :

$$z_1=e^{i\theta}+\sqrt{2\sin\theta}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \text{ و } z_2=e^{i\theta}-\sqrt{2\sin\theta}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} .$$

أ- بين أن النقط A و B و M_1 غير مستقيمية .

ب- بين أن : $\frac{z_1'}{z_2'}=-1$ ، ثم استنتج أن النقط A و B و M_1 و M_2 متداورة .

د- بين أن : $e^{i\theta}-i=-2i\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right).e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ ، ثم استنتج أن النقطة M_1 تنتمي إلى دائرة (Γ) ينبغي تحديد شعاعها و لحق مركزها .

❖ تمارين إضافية:

○ تمرين رقم 01:

✓ حل في المجموعة $\mathbb{C}^2$ المعادلة : $(E): |u+iv|^2=u^2+v^2$.

○ تمرين رقم 02:

✓ بين أنه : $(\forall a\in\mathbb{C}-[-1,1])(\exists! b\in\mathbb{C}); \begin{cases} a=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right) \\ |b|>1 \end{cases}$.

○ تمرين رقم 03:

✓ أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*); S_n=\sum_{k=1}^{n}|\sin(k)|$.

○ تمرين رقم 04:

✓ بين أن : $(\forall(x,\theta)\in]-1,1[\times\mathbb{R}); \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k\sin(k\theta)=\frac{x\sin\theta}{x^2-2x\cos\theta+1}$.

○ تمرين رقم 05:

⇦ في المستوى العقدي (P) نعتبر النقط $A(z)$ و $B(z^2)$ و $C(z^3)$ ، حيث $z\in\mathbb{C}$.

✓ حدد شرطا كافيا و لازما لكي يكون ABC مثلثا مركز تعامده النقطة O أصل المعلم .

○ تمرين رقم 06:

⇦ ليكن f_n التحويل الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من (P) بالنقطة $M'(z')$ من (P) بحيث : $z'=e^{i\frac{n\pi}{3}}z+2$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

✓ حدد تبعا لقيم n من $\mathbb{N}$ طبيعة التحويل f_n (ينبغي تحديد عناصره المميزة في كل حالة).

○ تمرين رقم 07:

⇦ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E): (1+z)^n=e^{2in\theta} \text{ ، حيث } \theta\in\mathbb{R} \text{ و } n\in\mathbb{N}^*-\{1\} .$$

✓ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم إستنتج أن : $\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin(n\theta)$.

إنتهى الموضوع .