Exercice 10pts maths-inter.ma 1. التمرين

(U_n) متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$

1) a) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$1 - U_{n+1} = \dfrac{1 - U_n}{1 + (U_n + 3)}$. 0,5 pts

b) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$U_{n+1} + 3 = \dfrac{5(U_n + 3)}{1 + (U_n + 3)}$. 0,5 pts

c) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{(1 - U_n)(U_n + 3)}{1 + (U_n + 3)}$. 1 pts

2) a) بين أن: $(\forall n \in IN); -3 < U_n < 1$. 1 pts

b) أدرس رتابة المتتالية (U_n). 1 pts

3) نعتبر المتتالية (V_n) بحيث: $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

a) بين أن (V_n) متتالية هندسية وحدد V_0. 1 pts

b) بين أن $U_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$. 1 pts

4) نعتبر المتتالية (W_n) بحيث مهما يكن $n \in IN$:

$W_n + 3V_n = 4n - 3$.

ونضع: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

a) بين أن: $W_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 4n - 3$. 1 pts

b) أثبت أن: $S_n = -\frac{5}{12} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{5}\right)^n$. 1 pts

c) استنتج المجموع $S'_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ بدلالة n. 1 pts

Exercice 10pts maths-inter.ma 2. التمرين

(U_n) متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{12U_n - 9}{4U_n} \end{cases}$

1) a) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$U_{n+1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{6(U_n - 3/2)}{4U_n}$. 0,5 pts

b) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$U_{n+1} - U_n = -\dfrac{(2U_n - 3)^2}{4U_n}$. 0,5 pts

2) a) بين أن: $(\forall n \in IN)$; $3/2 < U_n$. 1 pts

b) أدرس رتابة المتتالية (U_n). 1 pts

3) نعتبر المتتالية (V_n) بحيث: $V_n = \dfrac{2}{2U_n - 3}$.

a) تحقق أن $V_{n+1} = \dfrac{4U_n}{3(2U_n - 3)}$. 1 pts

b) استنتج أن (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{2}{3}$. 1 pts

c) بين أن $U_n = \dfrac{3(n+4)}{2(n+3)}$ مهما يكن $n \in IN$. 1 pts

4) نعتبر المتتالية (W_n) بحيث مهما يكن $n \in IN$:

$W_n - V_n = 3^n - 1$.

ونضع: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

و $Q_n = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^2$

a) بين أن: $W_n = 3^n + \dfrac{2n+6}{3} - 1$. 1 pts

b) أثبت أن: $S_n = \dfrac{(n+1)(n+6)}{3}$. 1 pts

c) أثبت أن: $Q_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$. 1 pts

d) استنتج المجموع $S'_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ بدلالة n. 1 pts

Bonne Chance

2 Bac Pc - Svt --- Devoir Surveillé n°: 1B --- 20/10/2017

Exercice n°: 1

$U_0 = 0$; $U_{n+1} = \dfrac{-1+7U_n}{5-3U_n}$

1°) a) on a :

$$\frac{1}{3} - U_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{-1+7U_n}{5-3U_n} = \frac{5-3U_n-3(-1+7U_n)}{3(5-3U_n)}$$

$$= \frac{8-24U_n}{3(4+1-3U_n)} = \frac{8(1-3U_n)}{12+3(1-3U_n)}$$

b) on a :

$$U_{n+1} + 1 = \frac{-1+7U_n}{5-3U_n} + 1 = \frac{-1+7U_n+5-3U_n}{5-3U_n}$$

$$= \frac{4+4U_n}{4+1-3U_n} = \frac{4(1+U_n)}{4+(1-3U_n)}$$

c) on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-1+7U_n}{5-3U_n} - U_n = \frac{-1+7U_n-5U_n+3U_n^2}{5-3U_n}$$

$$= \frac{3U_n^2+2U_n-1}{5-3U_n} = \frac{3U_n^2+3U_n-U_n-1}{5-3U_n}$$

$$= \frac{3U_n(U_n+1)-(U_n+1)}{4+(1-3U_n)}$$

$$= \frac{(3U_n-1)(U_n+1)}{4+(1-3U_n)} = -\frac{(1+U_n)(1-3U_n)}{4+(1-3U_n)}$$

2°) a) Montrons par Récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}$; $-1 < U_n < \frac{1}{3}$

*) on a $-1 < U_0 < \frac{1}{3}$ car $U_0 = 0$

la propriété est donc vraie pour $n=0$

*) Supposons que $0 < U_n < \frac{1}{3}$

d'où $-1 < -3U_n < 3$ et $-1 < U_n$

d'où $0 < 1-3U_n$ et $0 < 1+U_n$

d'où $\frac{1}{3} - U_{n+1} = \frac{8(1-3U_n)}{12+13(1-3U_n)} > 0$ d'où $U_{n+1} < \frac{1}{3}$

et $U_{n+1} + 1 = \frac{4(1+U_n)}{4+(1-3U_n)} > 0$ d'où $-1 < U_{n+1}$

ce qui fait $-1 < U_{n+1} < \frac{1}{3}$

Conclusion: D'après le principe de Récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; -1 < U_n < \frac{1}{3}$$

b) Etude de la convergence de (U_n)

on a d'après 1°) a) $U_{n+1} - U_n = -\frac{(1+U_n)(1-3U_n)}{4+(1-3U_n)}$

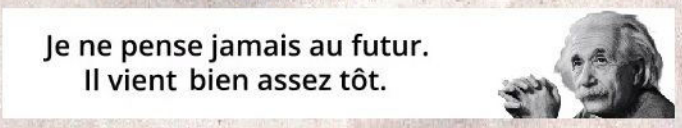
or on a d'après la question précédente

$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; -1 < U_n < \frac{1}{3}$ ce qui fait

$0 < 1+U_n$ et $0 < 1-3U_n$

d'où $U_{n+1} - U_n < 0$, ce qui fait $U_{n+1} < U_n$

et la suite (U_n) est strictement décroissante.



3°/ on a $v_n = \frac{3U_n - 1}{U_n + 1}$

a) nature de la suite (v_n)

on a $v_{n+1} = \frac{3U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{-3+21U_n}{5-3U_n} - \frac{5-3U_n}{5-3U_n}}{\frac{-1+7U_n}{5-3U_n} + \frac{5-3U_n}{5-3U_n}}$

$= \frac{-3+21U_n-5+3U_n}{-1+7U_n+5-3U_n} = \frac{-8+24U_n}{4+4U_n}$

$= \frac{8}{4} \times \frac{3U_n - 1}{U_n + 1} = 2v_n$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = -1$

b) Calcul de U_n :

on a $v_n = \frac{3U_n - 1}{U_n + 1}$ d'où $U_n v_n + v_n = 3U_n - 1$

d'où $U_n(v_n - 3) = -1 - v_n$ d'où $U_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 3}$

ce qui fait $U_n = \frac{1 + v_n}{3 - v_n}$, or (v_n)

est géométrique d'où $v_n = v_0 \times q^n = -2^n$

d'où $U_n = \frac{1 - 2^n}{3 + 2^n}$

4°) a) Calcul de W_n :

on a $W_n + V_n = 2n - 1$, d'où

$W_n = -V_n + 2n - 1$ or $V_n = -2^n$

d'où $W_n = 2^n + 2n - 1$

c/ on a $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$

or (V_n) est une suite géométrique

d'où $S_n = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = -\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

d'où $S_n = 1 - 2^{n+1}$

d/ on a $A_n = 1+2+3+\dots+n$

A_n est donc la somme des premiers termes d'une suite Arithmétique de raison 1 et de premier terme 1 ; d'où

$A_n = \frac{n}{2}(1+n)$ d'où $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$

e/ on a $W_n = -V_n + 2n - 1$

d'où on obtient successivement

$$\begin{aligned} W_0 &= -V_0 + 2\times 0 - 1 \\ W_1 &= -V_1 + 2\times 1 - 1 \\ W_2 &= -V_2 + 2\times 2 - 1 \\ &\vdots \\ W_n &= -V_n + 2\times n - 1 \end{aligned}$$

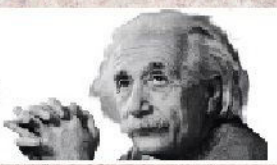
$$S'_n = -S_n + 2A_n - (n+1)\times 1$$

or $S_n = 1 - 2^{n+1}$ et $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$

d'où $S'_n = 2^{n+1} - 1 + n(n+1) - (n+1)$

$S'_n = 2^{n+1} - 1 + n^2 + n - n - 1$

d'où $S'_n = 2^{n+1} + n^2 - 2$



Exercice n°2 $\quad U_0 = 11 \; ; \; U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 25}{U_n - 3}$.

1°) a) on a :

$$U_{n+1} - 5 = \frac{7U_n - 25}{U_n - 3} - \frac{5U_n - 15}{U_n - 3} = \frac{7U_n - 25 - 5U_n + 15}{U_n - 3}$$

$$= \frac{2U_n - 10}{U_n - 3} = \frac{2(U_n - 5)}{U_n - 3}$$

b) on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{7U_n - 25}{U_n - 3} - \frac{U_n^2 - 3U_n}{U_n - 3} = \frac{-U_n^2 + 10U_n - 25}{U_n - 3}$$

$$= -\frac{U_n^2 - 10U_n + 25}{U_n - 3} = -\frac{(U_n - 5)^2}{U_n - 3}$$

2°) a) Montrons par Récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 5 < U_n$$

*) on a $5 < U_0 = 11$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$

*) supposons que $5 < U_n$

on a $U_{n+1} - 5 = \dfrac{2(U_n - 5)}{U_n - 3}$, d'après l'hypothèse de Récurrence on a $3 < 5 < U_n$ d'où

$$0 < U_n - 5 \quad \text{et} \quad 0 < U_n - 3$$

d'où $\quad 0 < U_{n+1} - 5$ d'où $5 < U_{n+1}$

Conclusion : d'après le principe du Raisonnement par Récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 5 < U_n$$

b) Etude de la monotonie de (U_n)

on a : $\quad U_{n+1} - U_n = -\dfrac{(U_n - 5)^2}{U_n - 3}$

or on a $3 < 5 < U_n$ d'où $0 < U_n - 3$

et on a aussi $0 < (U_n - 5)^2$

d'où $U_{n+1} - U_n < 0$ ce qui fait $U_{n+1} < U_n$

et par suite la suite (U_n) est décroissante strictement.

3°/ on a : $v_n = \dfrac{1}{U_n - 5}$

a) on a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1} - 5} = \dfrac{1}{\dfrac{7U_n - 25}{U_n - 3} - 5}$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{U_n - 3}{7U_n - 25 - 5U_n + 15} = \frac{U_n - 3}{2U_n - 10}$$

d'où $v_{n+1} = \dfrac{U_n - 3}{2(U_n - 5)}$

b) on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{U_n - 3}{2(U_n - 5)} - \dfrac{1}{U_n - 5}$

d'où

$$v_{n+1} - v_n = \frac{U_n - 3 - 2}{2(U_n - 5)} = \frac{U_n - 5}{2(U_n - 5)} = \frac{1}{2}$$

d'où $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}$

donc (v_n) est une suite Arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{1}{U_0 - 5} = \frac{1}{11 - 5} = \frac{1}{6}$$

c/ calcul de U_n :

on a : $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$ d'où $u_n - 5 = \frac{1}{v_n}$

d'où $u_n = 5 + \frac{1}{v_n}$

or (v_n) est Arithmétique d'où

$$v_n = v_0 + n.r = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}n = \frac{3n+1}{6}$$

d'où $u_n = 5 + \frac{6}{3n+1} = \frac{15n+5+6}{3n+1}$

d'où $u_n = \frac{15n+11}{3n+1}$

d) $\lim u_n$? on a $u_n = \frac{15n+11}{3n+1}$

40/a) on a : $W_n - V_n = 2^n - 1$

d'où $W_n = v_n + 2^n - 1$

or $v_n = \frac{3n+1}{6}$, d'où $W_n = \frac{3n+1}{6} + 2^n - 1$

ce qui fait $W_n = 2^n + \frac{3n+1}{6} - 1$,

c/ (V_n) est une suite Arithmétique donc

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = \frac{n+1}{2}(V_0 + V_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{3n+1}{6}\right)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} \times \frac{3n+2}{6} \text{ d'où } S_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

d/ on a $R_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$

donc R_n est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2^0 = 1$ d'où

$$R_n = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}, \text{ d'où } R_n = 2^{n+1} - 1$$

e/ $S'_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$

on a $W_n = V_n + 2^n - 1$

d'où, on a successivement

$$\begin{aligned}
W_0 &= V_0 + 2^0 - 1 \\
W_1 &= V_1 + 2^1 - 1 \\
W_2 &= V_2 + 2^2 - 1 \\
&\vdots \\
W_n &= V_n + 2^n - 1
\end{aligned}$$

$$S'_n = S_n + R_n - (n+1) \times 1$$

d'où $S'_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} + 2^{n+1} - 1 - n - 1$

d'où :

$$S'_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} + 2^{n+1} - n - 2$$

On ne peut pas résoudre un problème avec le même niveau de pensée que celle qui l'a créé.