Exercice 10pts maths-inter.ma 1. التمرين

$(U_n)$ متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2} \end{cases}$

1) a) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$1 - U_{n+1} = \dfrac{1 - U_n}{1 + (1 + U_n)}$. 0,5pts

b) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$1 + U_{n+1} = \dfrac{3(1 + U_n)}{1 + (1 + U_n)}$. 0,5pts

c) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{(1 - U_n)(1 + U_n)}{1 + (1 + U_n)}$. 1pts

2) a) بين أن: $(\forall n \in IN); -1 < U_n < 1$. 1pts

b) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)$. 1pts

3) نعتبر المتتالية $(V_n)$ بحيث: $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$.

a) بين أن $(V_n)$ متتالية هندسية وحدد $V_0$. 1pts

b) بين أن $U_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$. 1pts

4) نعتبر المتتالية $(W_n)$ بحيث مهما يكن $n \in IN$ :

$W_n + V_n = 2n + 3$.

ونضع: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

a) بين أن: $W_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n + 3$. 1pts

b) أثبت أن: $S_n = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. 1pts

c) استنتج المجموع $S'_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ بدلالة n. 1pts

Exercice 10pts maths-inter.ma 2. التمرين

$(U_n)$ متتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4 - U_n} \end{cases}$

1) a) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$2 - U_{n+1} = \dfrac{2(2 - U_n)}{2 + (2 - U_n)}$. 0,5pts

b) بين أنه مهما يكن $n \in IN$ فإن :

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 2)^2}{2 + (2 - U_n)}$. 0,5pts

2) a) بين أن: $(\forall n \in IN)$ ; $U_n < 2$. 1pts

b) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)$. 1pts

3) نعتبر المتتالية $(V_n)$ بحيث: $V_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$.

a) تحقق أن $V_{n+1} = \dfrac{4 - U_n}{2(U_n - 2)}$. 1pts

b) استنتج أن $(V_n)$ حسابية أساسها $r = -\frac{1}{2}$. 1pts

c) بين أن $U_n = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$ مهما يكن $n \in IN$. 1pts

4) نعتبر المتتالية $(W_n)$ بحيث مهما يكن $n \in IN$ :

$W_n + 2V_n = 7^n - 3$.

ونضع: $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

و $Q_n = 7^0 + 7^1 + 7^2 + ... + 7^2$

a) بين أن: $W_n = 7^n + n - 1$. 1pts

b) أثبت أن: $S_n = -\dfrac{(n+1)(n+4)}{4}$. 1pts

c) أثبت أن: $Q_n = \frac{1}{6}\left(7^{n+1} - 1\right)$. 1pts

d) استنتج المجموع $S'_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ بدلالة n. 1pts

Bonne Chance

2 Bac Pc- Svt --- Devoir n°1 D --- Semestre1 ---26-10-2017

## Exercice n°1

$U_0 = 0$ ; $U_{n+1} = \dfrac{2U_n+1}{U_n+2}$

1°) a) on a : $1 - U_{n+1} = \dfrac{U_n+2}{U_n+2} - \dfrac{2U_n+1}{U_n+2}$

$$= \frac{U_n+2-2U_n-1}{U_n+2}$$

$$= \frac{1-U_n}{2+U_n}$$

d'où $1 - U_{n+1} = \dfrac{1-U_n}{1+(1+U_n)}$

b) on a : $1 + U_{n+1} = \dfrac{U_n+2+2U_n+1}{U_n+2} = \dfrac{3U_n+3}{U_n+2}$

$$1 + U_{n+1} = \frac{3(1+U_n)}{1+(1+U_n)}$$

c) on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_n+1}{U_n+2} - \dfrac{U_n^2+2U_n}{U_n+2}$

$$= \frac{2U_n+1-U_n^2-2U_n}{U_n+2}$$

$$= \frac{1-U_n^2}{2+U_n}$$

d'où $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(1-U_n)(1+U_n)}{1+(1+U_n)}$

2°/ a) Montrons par Récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}$ ; $-1 < U_n < 1$

* on a $-1 < U_0 = 0 < 1$ $\quad -1 < U_0 = 0 < 1$

* supposons que $-1 < U_n < 1$

d'où $0 < 1 - U_n$ et $0 < 1 + U_n$

d'où $1 - U_{n+1} = \dfrac{1-U_n}{1+(1+U_n)} > 0$ donc $U_{n+1} < 1$

et $1+U_{n+1} = \dfrac{3(1+U_n)}{1+(1+U_n)} > 0$ d'où $-1 < U_{n+1}$

D

donc $-1 < U_{n+1} < 1$

Conclusion : D'après le principe de Récurrence

$\forall n \in \mathbb{N}; \; -1 < U_n < 1$

b) monotonie de $U_n$ :

on a, d'après la question précédente, on a

$-1 < U_n < 1$ d'où $0 < 1+U_n$ et $0 < 1-U_n$

d'où $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(1-U_n)(1+U_n)}{1+(1+U_n)} > 0$

d'où $U_n < U_{n+1}$

d'où $(U_n)$ est une suite croissante

3°/ $v_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a) on a $v_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{2U_n+1}{U_n+2} - 1}{\frac{2U_n+1}{U_n+2} + 1}$

$v_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1 - U_n - 2}{2U_n + 1 + U_n + 2} = \dfrac{U_n - 1}{3(U_n+1)} = \dfrac{1}{3} v_n$

donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$

b) $(v_n)$ étant géométrique donc

$v_n = v_0 \times q^n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

et on a $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$, d'où

$$u_n v_n + v_n = u_n - 1$$

$$u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$$

$$u_n(1 - v_n) = 1 + v_n$$

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \quad \text{or} \quad v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

d'où :

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

4°/ a) on a $w_n + v_n = 2n + 3$

d'où $w_n = -v_n + 2n + 3$

$$w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n + 3$$

4 on a $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

or $(v_n)$ est géométrique donc

$$S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_n = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$S_n = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

d/ $S'_n = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n$

or $W_n = -V_n + 2n + 3$

d'où on a successivement

$$W_0 = -V_0 + 2\times 0 + 3$$
$$W_1 = -V_1 + 2\times 1 + 3$$
$$W_2 = -V_2 + 2\times 2 + 3$$
$$\vdots$$
$$W_n = -V_n + 2\times n + 3$$

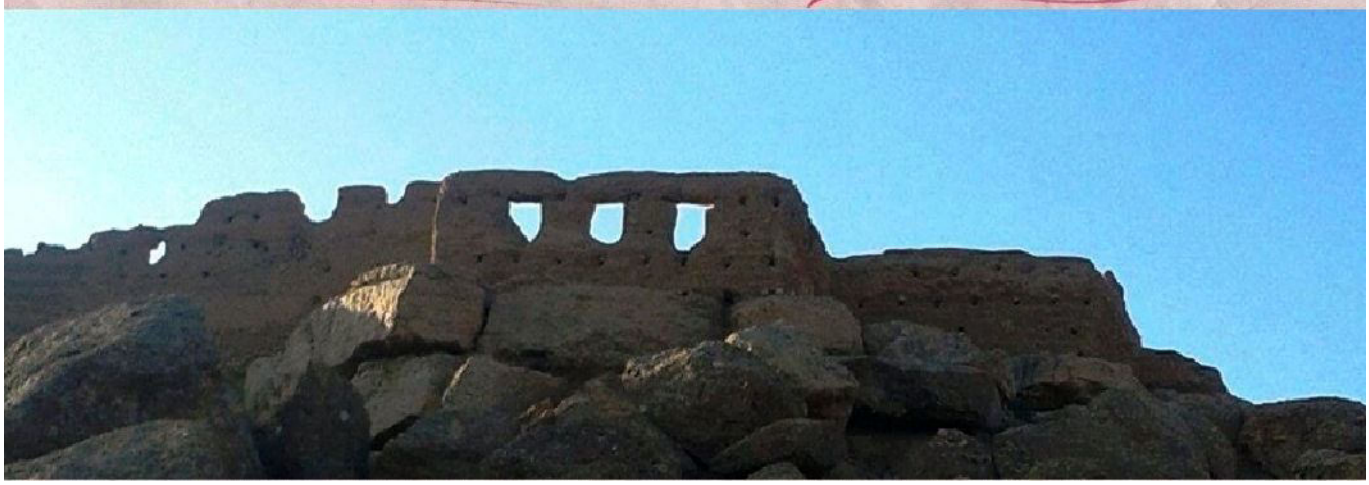
$$S'_n = -S_n + 2(1+2+3+\cdots+n) + 3(n+1)$$

or $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

car c'est la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1, d'où

$$S'_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + n(n+1) + 3(n+1)$$

$$S'_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + n^2 + 4n + \frac{9}{2}$$



Exercice n°2 $\quad U_0 = 1 \; ; \; U_{n+1} = \dfrac{4}{4-U_n}$

1°) a) on a : $2 - U_{n+1} = 2 - \dfrac{4}{4-U_n}$

$$= \frac{8 - 2U_n - 4}{4 - U_n} = \frac{4 - 2U_n}{4 - U_n}$$

d'où $2 - U_{n+1} = \dfrac{2(2-U_n)}{2 + (2-U_n)}$

b) on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{4}{4-U_n} - U_n = \dfrac{4 - 4U_n + U_n^2}{4 - U_n}$

d'où $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 2)^2}{2 + (2-U_n)}$

2°) a) Montrons par Récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N} ; \quad U_n < 2$

*) on a $\quad U_0 = 1 < 2$

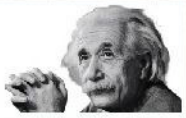
*) Supposons que $\quad U_n < 2$, d'où $0 < 2 - U_n$

d'où $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 2)^2}{2 + (2-U_n)} > 0$

d'où $\quad U_n < U_{n+1}$

ce qui fait $(U_n)$ est strictement croissante

On ne peut pas résoudre un problème avec le même niveau de pensée que celle qui l'a créé.



3°) $\quad v_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$

a) on a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1} - 2} = \dfrac{1}{\dfrac{4}{4-U_n} - 2}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{4 - 8 + 2U_n}{4 - U_n}} = \frac{4 - U_n}{2U_n - 4}$$

d'où $v_{n+1} = \dfrac{4 - U_n}{2(U_n - 2)}$

b) on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{4 - U_n}{2(U_n - 2)} - \dfrac{1}{U_n - 2}$

$= \dfrac{4 - U_n - 2}{2(U_n - 2)} = \dfrac{2 - U_n}{2(U_n - 2)}$

d'où $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}$ Arithmétique

d'où $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2}$

donc $(v_n)$ est une suite Arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -1$

c) on a $v_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$ d'où $U_n - 2 = \dfrac{1}{v_n}$

d'où $U_n = 2 + \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{2v_n + 1}{v_n}$

or $(v_n)$ est Arithmétique donc

$v_n = v_0 + nr = -1 - \frac{1}{2}n = -\dfrac{n+2}{2}$

d'où $U_n = \dfrac{-n-2+1}{-\frac{n+2}{2}} = \dfrac{-n-1}{-\frac{n+2}{2}} = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$

d'où $U_n = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2(n+1)}{n+2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2n}{n} = 2$

d'où $\lim\limits_{+\infty} U_n = 2$

40) a) on a $W_n + 2v_n = 7^n - 3$

d'où $W_n = -2v_n + 7^n - 3$ or $v_n = -\dfrac{n+2}{2}$

d'où $W_n = (n+2) + 7^n - 3$

$W_n = 7^n + n - 1$

c) $(V_n)$ est une suite Arithmétique

d'où $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \frac{n+1}{2}(V_0 + V_n)$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left(-1 - \frac{n+2}{2}\right) = \frac{n+1}{2} \times \frac{-n-4}{2}$$

$$S_n = -\frac{(n+1)(n+4)}{4}$$

d) $R_n = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \cdots + 7^n = 1 \times \frac{1-7^{n+1}}{1-7}$

$R_n = \frac{1}{6}(7^{n+1} - 1)$ car $R_n$ est la somme des premiers terme d'une suite géométrique de raison $q = 7$ et de premier terme 1

$$R_n = \frac{1}{6}(7^{n+1} - 1)$$

e) on a $W_n = -2V_n + 7^n - 3$

d'où on a

$$W_0 = -2V_0 + 7^0 - 3$$
$$W_1 = -2V_1 + 7^1 - 3$$
$$W_2 = -2V_2 + 7^2 - 3$$
$$\vdots$$
$$V_n = -2V_n + 7^n - 3$$

$$S'_n = -2S_n + R_n - 3(n+1)$$

d'où $S' = \frac{(n+1)(n+4)}{2} + \frac{1}{6}(7^{n+1} - 1) - 3(n+1)$

$$S' = \frac{n^2 - n - 2}{2} + \frac{1}{6}7^{n+1} - \frac{1}{6}$$