المستوى مرتبط بمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على IR كما يلي : $g(x)=x-1+e^{x}$

(C_g) هو المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

b) بين أن (C_g) يقبل مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ وحدد الوضع النسبي للمنحنى (C_g) والمستقيم (Δ) . 0,5pts

c) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C_g) بجوار $+\infty$. 0,5pts

2) a) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم أنجز جدول تغيراتها. 0,5pts

b) أحسب $g(0)$ واستنتج ، معللا جوابك، جدول إشارات الدالة g على IR . 0,5pts

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=x-3-xe^{-x}$.

(C_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، استنتج طبيعة الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $-\infty$. 0,5pts

b) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) بين أن (C_f) يقبل مقاربا مائلا (D) بجوار $+\infty$ وحدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) . 0,5pts

2) بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x}}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f معللا جوابك. 0,5pts

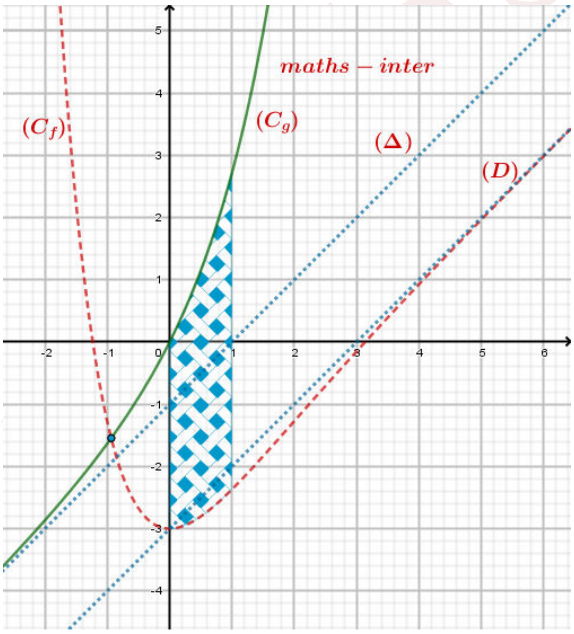
الجزء الثالث : نضع: $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ و $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ لكل $n\in IN^*$

1) أحسب I_0 و I_1 ، ثم بين أن $I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n$ 0,25pts

2) استنتج I_2 و I_3 . 0,25pts 0,25pts

3) تحقق أن: $nI_n=I_{n+1}-I_n+\frac{1}{e}$. 0,5pts استنتج أن : $I_1+2I_2+3I_3+...+nI_n=I_{n+1}-1+\frac{n+2}{e}$. 0,25pts

الجزء الرابع : تم إنشاء المنحنيين (C_g) و (C_f) والمقاربين (Δ) و (D) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ كما يبين الشكل جانبه.



نفترض في هذا الجزء أن $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1Km$.

1) يمثل الجزء الملون على الشكل تجسيدا لضيعة فلاحية مساحتها S . أثبت أن $S=\int_0^1(2+e^{x}+xe^{-x})dx$ ثم حدد مبيانيا قيمة تقريبية لمساحة الضيعة ب Km^2 .

2) أحسب القيمة المضبوطة للمساحة S ب Km^2 .

3) اقتضت المصلحة العامة أن يتم تفويت جزء من الضيعة لصاح سكة القطار الفائق السرعة الذي سيربط بين طنجة والدار البيضاء أواخر سنة 2018 وهو الجزء من الضيعة المحصور بين المستقيمين (Δ) و (D).

a) أحسب S' مجموع مساحتي الجزأين المتبقيين من الضيعة بعد التفويت.

b) حدد S'_1 مساحة جزء الضيعة الموجود تحت المستقيم (D) . 0,5pts

c) استنتج S'_2 مساحة جزء الضيعة الموجود فوق المستقيم (Δ) . 0,5pts

Voir La Solution en Bas

Partie 1 : $g(x) = x - 1 + e^x$; $x \in \mathbb{R}$

1) a) Calcul de $\lim_{x \to -\infty} g(x)$:

on a $\lim_{x \to -\infty} (x-1) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

d'où $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

b) étude de la branche infinie au voisinage $-\infty$

on a $g(x) - (x-1) = e^x$ or $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

d'où $\lim_{x \to -\infty} (g(x) - (x-1)) = 0$

ce qui fait, la droite d'équation (Δ) $y = x - 1$ est une Asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$g(x) - (x-1) = e^x > 0$$

d'où (C_g) est au dessus de (Δ) sur $\mathbb{R}$.

c) calcul de $\lim_{x \to +\infty} g(x)$?

on a $\lim_{x \to +\infty} (x-1) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$

on a $\frac{g(x)}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x}$

or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

d'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ d'où

(C_g) admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

2°) a) variations de la fonction g

on a $g(x) = x - 1 + e^x$, d'où

$g'(x) = 1 + e^x > 0$ d'où g est strictement croissante $\mathbb{R}$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

b) Signes de $g(x)$

on a $g(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$

or la fonction g est croissante strictement

d'où,

* si $x < 0$ Alors $g(x) < g(0)$ or $g(0) = 0$

  d'où $g(x) < 0$

* si $0 < x$ Alors $g(0) < g(x)$ or $g(0) = 0$

  d'où $0 < g(x)$

d'où le tableau de signes de $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie 2 $f(x) = x - 3 - xe^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$

1) a) Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

on a $f(x) = x\left(1 - \frac{3}{x} - e^{-x}\right)$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

on a $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{3}{x} - e^{-x}$

et d'après ce qui précède, on déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

d'où la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$.

b) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) = \lim x = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{t \to -\infty} te^{t} = 0$ d'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Branche infinie au voisinage de $+\infty$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-3)) = \lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{t \to -\infty} te^{t} = 0$

d'où la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une Asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2o/ calcul de $g'(x)$:

on a $f(x) = x - 3 - xe^{-x}$, d'où

$$f'(x) = 1 - 0 - (e^{-x} - xe^{-x})$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + xe^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}$$

d'où $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 + x}{e^x} = \dfrac{x - 1 + e^x}{e^x}$

d'où $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$

Variations de la fonction f

on a $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est de même signe que $g(x)$ or d'après la première partie 2o/ b/ on a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

d'où le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0 - 3 - 0 = -3$.

MATHS INTER

Partie 3 $I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx$; $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1/ calcul de I_0 et de I_1

on a $I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx = -[e^{-x}]_0^1 = -(\frac{1}{e} - 1) = 1 - \frac{1}{e}$

$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx$

Posons $u = x$ $u' = 1$

$v' = e^{-x}$ $v = -e^{-x}$

$I_1 = -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -(\frac{1}{e} - 0) + 1 - \frac{1}{e}$

$$I_1 = 1 - \frac{2}{e}$$

I_n calcul de I_{n+1} en fonction de I_n I_{n+1}

on a $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$

$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x}dx$

Posons $u = x^{n+1}$ $u' = (n+1)x^n$

$v' = e^{-x}$ $v = -e^{-x}$

d'où $I_{n+1} = -[x^{n+1}e^{-x}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

$= -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$ d'où

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

2/ Calcul de I_2 et I_3

on a $I_2 = -\frac{1}{e} + 2 I_1 = -\frac{1}{e} + 2(1 - \frac{2}{e}) =$

d'où $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$

$$I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{1}{e} + 3\left(2 - \frac{5}{e}\right)$$

$$I_3 = 6 - \frac{16}{e}$$

3/ vérifions que $nI_n = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{e}$

on a $\quad I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ d'où

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + nI_n + I_n$$

d'où $\quad nI_n = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{e}$

Déduction : Appliquons la formule précédente respectivement à $n = 1, 2, 3, \dots ; n$; on obtient

$$1 \cdot I_1 = \cancel{I_2} - I_1 + \frac{1}{e}$$

$$2 \cdot I_2 = \cancel{I_3} - \cancel{I_2} + \frac{1}{e}$$

$$+ \quad 3 \cdot I_3 = \cancel{I_4} - \cancel{I_3} + \frac{1}{e}$$

$$\vdots$$

$$n\, I_n = \cancel{I_{n+1}} - \cancel{I_n} + \frac{1}{e}$$

$$1 \cdot I_1 + 2I_2 + \dots + nI_n = I_{n+1} - I_1 + n \times \frac{1}{e}$$

d'où

$$1 \cdot I_1 + 2I_2 + \dots + nI_n = I_{n+1} - \left(1 - \frac{2}{e}\right) + \frac{n}{e}$$

d'où

$$1 \cdot I_1 + 2I_2 + \dots + nI_n = I_{n+1} - 1 + \frac{n+2}{e}$$

Partie 4 1/ Expression de S

d'après le graphique, le domaine colorié est delimité par (C_f) et (C_g) et par les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, d'autre par (C_g) se trouve au dessus de (C_f) sur l'intervalle $[0,1]$ d'où

$$S=\int_0^1 (g(x)-f(x))\,dx$$

et on a : $g(x)-f(x)=(x-1+e^x)-(x-3-xe^{-x})$
$=x-1+e^x-x+3+xe^{-x}$
$=2+e^x+xe^{-x}$

ce qui fait

$$S=\int_0^1 (2+e^x+xe^{-x})\,dx$$

valeur approchée de S

le domaine colorié contient à peu près 4 carreaux c'est à dire 4 unités d'aire et $1UA=1\,km^2$ d'où $S\simeq 4\,km^2$

2/ valeur exacte de S

on a $S=\int_0^1 (2+e^x+xe^{-x})\,dx$

d'où $S=\int_0^1 (2+e^x)\,dx+\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

$$S=\left[2x+e^x\right]_0^1+I_1=$$

$$S=(2+e)-(0+1)+1-\frac{2}{e}$$

$$S=2+e-\frac{2}{e}\ km^2\quad (S\simeq 4)$$

3°/a) Calcul de la surface S' restante

la zône de la ferme délimitée par les droites (Δ) et (D) est un parallélogramme de base 2 Km et de hauteur 1 Km, sa surface est donc $2 \times 1 = 2\ Km^2$ d'où la surface S' restante de la ferme est

$$S' = S - 2 \text{ d'où}$$

$$S' = \left(e - \frac{2}{e}\right) Km^2$$

b) calcul de S'_1

on a $S'_1 = \int_0^1 ((x-3) - f(x))dx = \int_0^1 xe^{-x}dx$

d'où $S'_1 = I_1$ d'où

$$S'_1 = 1 - \frac{2}{e}\ Km^2$$

c) calcul de S'_2

on a $S'_2 = S' - S'_1$

$$S'_2 = \left(e - \frac{2}{e}\right) - \left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

$$S'_2 = (e - 1)\ Km^2$$