Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie : I On considère la fonction numérique g définie dans $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x-1+e^{x}$.

(C_g) est la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Montrer que (C_g) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$, puis déterminer la position relative de (C_g) et de (Δ) . 0,5pts

c) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$, en déduire la nature de la branche infinie de (C_g) au voisinage de $+\infty$. 0,5pts

2) a) Etudier les variations de la fonction g , puis dresser son tableau de variations . 0,5pts

b) Calculer $g(0)$ en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. Justifier les réponses 0,5pts

Partie : II

On considère la fonction numérique f définie dans $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-3-xe^{-x}$.

(C_f) est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, en déduire la nature de la branche infinie de (C_f) au

b) voisinage de $-\infty$. 0,5pts

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,5pts

b) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_f) et de (D) . 0,5pts

3) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x}}$, puis dresser le tableau de variations de f . Justifier votre réponse. 0,5pts

Partie : III

On pose : $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$ et $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Calculer I_0 et I_1, puis montrer que $I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n$. 0,25pts

2) En déduire I_2 et I_3.

3) Vérifier que : $nI_n=I_{n+1}-I_n+\frac{1}{e}$, en déduire que $I_1+2I_2+3I_2+...+nI_n=I_{n+1}-1+\frac{n+2}{e}$.

Partie : III

La figure ci-contre représente les courbes (C_g) et (C_f) et les droites (Δ) et (D) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On suppose dans cette partie que $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1Km$.

1) La partie Hachurée de la figure représente le terrain d'une ferme agricole de surface S. Montrer que $S=\int_0^1(2+e^x+xe^{-x})dx$ et déterminer une valeur approchée de S en Km^2, en se basant sur la figure.

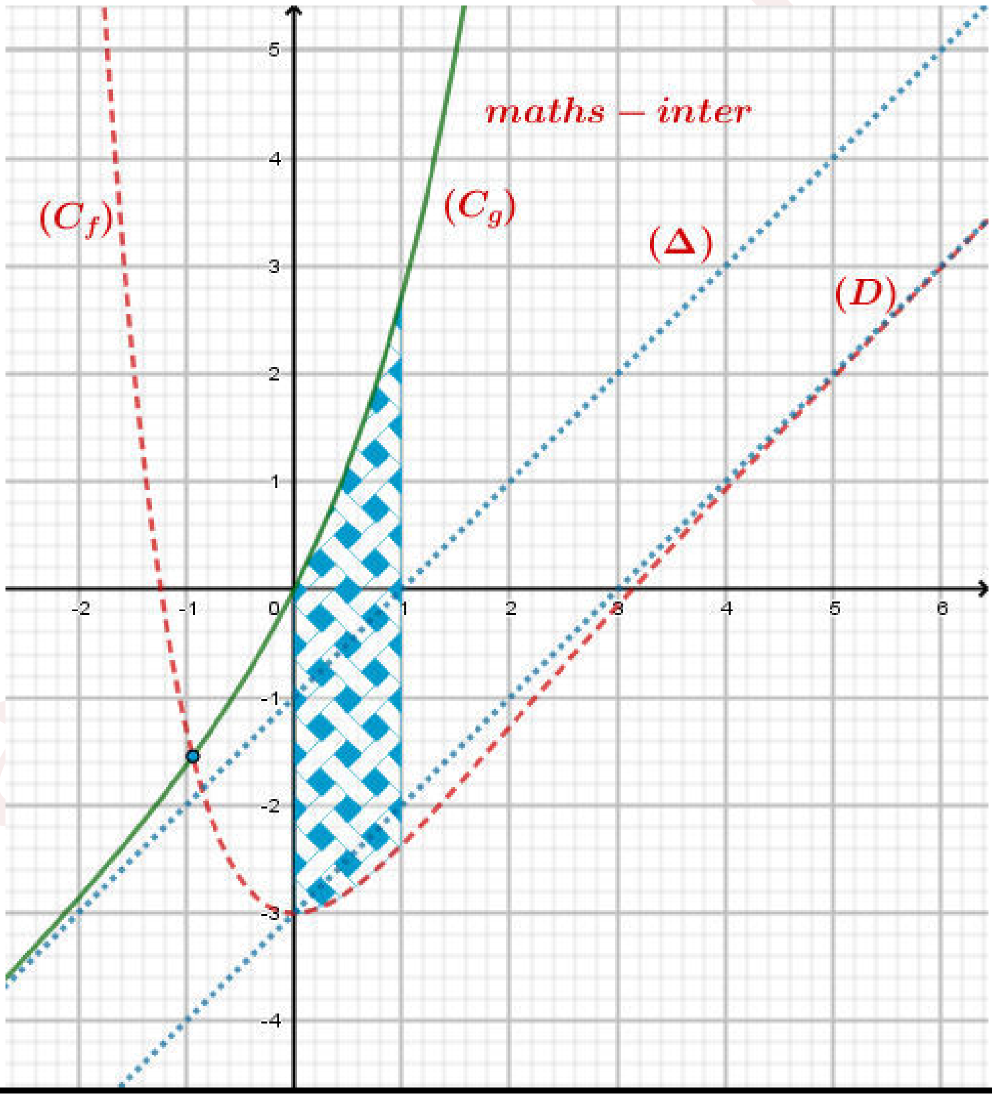
2) Déterminer la valeur exacte de de S en Km^2.

3) L'intérêt général nécessite l'utilisation de la partie de la ferme délimitée par les droites (Δ) et (D) en faveur du chemin de fer du TGV qui va faire la liaison entre Tanger et Casa en fin de l'année 2018.

a) Calculer le nombre S' représentant le total des deux parties restantes de la ferme après le découpage de la partie réservée pour le TGV.

b) Déterminer S'_1 la surface de la partie inférieure de la ferme située en dessous de de la droite (D). 0,5pts.

c) En déduire S'_2 la surface de la partie Supérieure de la ferme située au dessus de de la droite (Δ). 0,5pts.



Voir La Solution en Bas

Partie 1 : $g(x) = x - 1 + e^x$; $x \in \mathbb{R}$

1) a) Calcul de $\lim_{x \to -\infty} g(x)$:

on a $\lim_{x \to -\infty} (x-1) = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

d'où $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

b) étude de la branche infinie au voisinage $-\infty$

on a $g(x) - (x-1) = e^x$ or $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

d'où $\lim_{x \to -\infty} (g(x) - (x-1)) = 0$

ce qui fait, la droite d'équation (Δ) $y = x - 1$ est une Asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a :

$g(x) - (x-1) = e^x > 0$

d'où (C_g) est au dessus de (Δ) sur $\mathbb{R}$.

c) calcul de $\lim_{x \to +\infty} g(x)$?

on a $\lim_{x \to +\infty} (x-1) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Calcul de $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$

on a $\frac{g(x)}{x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x}$

or $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

d'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ d'où

(C_g) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$.

2°) a) variations de la fonction g

on a $g(x) = x - 1 + e^x$, d'où

$g'(x) = 1 + e^x > 0$ d'où g est strictement croissante $\mathbb{R}$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Signes de $g(x)$

on a $g(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$

or la fonction g est croissante strictement d'où,

* si $x < 0$ Alors $g(x) < g(0)$ or $g(0) = 0$
  d'où $g(x) < 0$
* si $0 < x$ Alors $g(0) < g(x)$ or $g(0) = 0$
  d'où $0 < g(x)$

d'où le tableau de signes de $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie 2 : $f(x) = x - 3 - xe^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$

1) a) Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

on a $f(x) = x\left(1 - \frac{3}{x} - e^{-x}\right)$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

on a $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{3}{x} - e^{-x}$

et d'après ce qui précède, on déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

d'où la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$.

b) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) = \lim x = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{t \to -\infty} te^{t} = 0$ d'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) Branche infinie au voisinage de $+\infty$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x-3)) = \lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{t \to -\infty} te^{t} = 0$

d'où la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une Asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$

2°/ calcul de $g'(x)$:

on a $f(x) = x - 3 - xe^{-x}$, d'où

$$f'(x) = 1 - 0 - (e^{-x} - xe^{-x})$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + xe^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}$$

d'où $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 + x}{e^x} = \dfrac{x - 1 + e^x}{e^x}$

d'où $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$

Variations de la fonction f

on a $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est de même signe que $g(x)$ n d'après la première partie 2°/ b/ on a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

d'où le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0 - 3 - 0 = -3.$

Partie 3 $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$; $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1) calcul de I_0 et de I_1

on a $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx = -[e^{-x}]_0^1 = -(\frac{1}{e}-1) = 1-\frac{1}{e}$

$I_1=\int_0^1 x e^{-x}dx$

Posons $u=x$ $\quad u'=1$

$v'=e^{-x}$ $\quad v=-e^{-x}$

$I_1=-[xe^{-x}]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx = -(\frac{1}{e}-0)+1-\frac{1}{e}$

$$I_1=1-\frac{2}{e}$$

I_n calcul de I_{n+1} en fonction de I_n I_{n+1}

on a $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx$

Posons $u=x^{n+1}$ $\quad u'=(n+1)x^n$

$v'=e^{-x}$ $\quad v=-e^{-x}$

d'où $I_{n+1}=-[x^{n+1}e^{-x}]_0^1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

$=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n$ d'où

$$I_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)I_n$$

2) Calcul de I_2 et I_3

on a $I_2=-\frac{1}{e}+2I_1=-\frac{1}{e}+2(1-\frac{2}{e})=$

d'où $I_2=2-\frac{5}{e}$

$$I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{1}{e} + 3\left(2-\frac{5}{e}\right)$$

$$I_3 = 6 - \frac{16}{e}$$

3/ vérifions que $nI_n = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{e}$

on a $\quad I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ d'où

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + nI_n + I_n$$

d'où $\quad nI_n = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{e}$

Déduction : Appliquons la formule précédente respectivement à $n = 1, 2, 3, \dots ; n$; on obtient

$$1.I_1 = \cancel{I_2} - I_1 + \frac{1}{e}$$
$$2.I_2 = \cancel{I_3} - \cancel{I_2} + \frac{1}{e}$$
$$3.I_3 = \cancel{I_4} - \cancel{I_3} + \frac{1}{e}$$
$$\vdots$$
$$+\quad nI_n = \cancel{I_{n+1}} - \cancel{I_n} + \frac{1}{e}$$

$$1.I_1 + 2I_2 + \dots + nI_n = I_{n+1} - I_1 + n \times \frac{1}{e}$$

d'où :

$$1.I_1 + 2I_2 + \dots + nI_n = I_{n+1} - \left(1 - \frac{2}{e}\right) + \frac{n}{e}$$

d'où

$$1.I_1 + 2I_2 + \dots + nI_n = I_{n+1} - 1 + \frac{n+2}{e}$$

Partie 4 1) Expression de S

d'après le graphique, le domaine colorié est délimité par (C_f) et (C_g) et par les droites d'équations $x=0$ et $x=1$, d'autre par (C_g) se trouve au dessus de (C_f) sur l'intervalle $[0,1]$ d'où

$$S=\int_0^1 (g(x)-f(x))\,dx$$

et on a : $g(x)-f(x)=(x-1+e^{x})-(x-3-xe^{-x})$

$$=x-1+e^{x}-x+3+xe^{-x}$$

$$=2+e^{x}+xe^{-x}$$

ce qui fait

$$S=\int_0^1 (2+e^{x}+xe^{-x})\,dx$$

valeur approchée de S

le domaine colorié contient à peu près 4 carreaux c'est à dire 4 unités d'aire et $1UA = 1\,km^2$ d'où $S \simeq 4\,km^2$

2) valeur exacte de S

on a $S=\int_0^1 (2+e^{x}+xe^{-x})\,dx$

d'où $S=\int_0^1 (2+e^{x})\,dx+\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

$$S=[2x+e^{x}]_0^1+I_1=$$

$$S=(2+e)-(0+1)+1-\frac{2}{e}$$

$$S=2+e-\frac{2}{e}\,km^2 \quad (S\simeq 4)$$

3°/a) Calcul de la surface S' restante

la zône de la fermé délimitée par les droites (Δ) et (D) est un parallélogramme de base 2 Km et de hauteur 1 Km, sa surface est donc $2\times1=2\,Km^2$ d'où la surface S' restante de la ferme est

$$S'=S-2 \text{ d'où}$$

$$S'=\left(e-\frac{2}{e}\right)Km^2$$

b) calcul de S'_1

on a $S'_1=\int_0^1((x-3)-f(x))dx=\int_0^1 xe^{-x}dx$

d'où $S'_1=I_1$ d'où

$$S'_1=1-\frac{2}{e}\ km^2$$

c) calcul de S'_2

on a $S'_2=S'-S'_1$

$$S'_2=\left(e-\frac{2}{e}\right)-\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

$$S'_2=(e-1)\ km^2$$