المستوى مرتبط في بمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-\ln x$.

يحتوي الشكل رقم 1 أسفله (fig - 01)، على التمثيل المبياني (C_g) للدالة g وعلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $g(1)$. 0,5pts

2) باعتمادك على المبيان في الشكل 1:

a) حل المعادلة $g(x)=x$ على المجال $]0,+\infty[$. 0,5pts

b) بين أن : $g(x)<x \; ; \; \forall x\in]1,+\infty[$. 1pts

3) باعتمادك على المبيان في الشكل 1:

a) أنجز جدول تغيرات الدالة g . 0,5pts

b) أستنتج معللا جوابك جدول إشارات $g'(x)$. 1pts

c) بين أن: $1\le g(x) \; ; \; \forall x\in]0,+\infty[$. 0,5pts

الجزء الثاني :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0=5 \\ U_{n+1}=g(U_n) \; ; \; (\forall n\in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) مثل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 على محور أفاصيل المعلم في الشكل 1. ماهي تخميناتك بخصوص رتابة وتقارب ونهاية المتتالية (U_n) ؟ 1pts

2) بين أن: $1<U_n<6 \; ; \; (\forall n\in \mathbb{N})$. 1pts

a) بين أن (U_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة . 0,5pts

b) حدد نهاية المتتالية (U_n) . 0,5pts

3) a) بين أن: $U_0U_1....U_n=e^{5-U_{n+1}} \; ; \; (\forall n\in \mathbb{N})$ 1pts

b) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0U_1....U_n)$ 0,5pts

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x-1+\dfrac{x^2}{2}-x\ln x \; ; \; 0<x \\ f(0)=-1 \end{cases}$$

1) a) بين أن f متصلة على اليمين في النقطة 0. 0,5pts

b) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 واعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 1pts

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس طبيعة الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $+\infty$. 1pts

3) a) بين أن $f'(x)=g(x) \; ; \; \forall x\in]0,+\infty[$ 0,5pts

b) أحسب $f(1)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f . 0,5pts

4) a) أدرس تحذب المنحنى (C_f) وبين أنه يقبل نقطة انعطاف وحيدة $A(1;\frac{1}{2})$ 1pts

b) حدد معادلة المماس (T) في نقطة الانعطاف A . 0,5pts

c) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي الى المجال $]0,1[$. 1pts

5) a) بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده . 1pts

b) حدد $\left(f^{-1}\right)'(1/2)$. 0,5pts

6) نضع لكل x من $]0,+\infty[$: $\varphi(x)=f(x)-x$

a) بين أن : $\varphi'(x)\ge 0 \; ; \; \forall x\in]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات φ على $]0,+\infty[$. 0,5pts

b) بين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β ينتمي الى المجال $]2,3[$. 0,5pts

(نقبل أن $\ln 2>\frac{1}{2}$ وأن $\ln 3<\frac{7}{6}$).

c) أدرس إشارات $\varphi(x)$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم $(\Delta) \; ; \; y=x$. 0,5pts

ملاحظة: نعتبر فيما كل ما تبقى من التمرين أن $\beta=e$

7) يحتوي الشكل رقم 2 أسفله (fig - 02)، على المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ وعلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

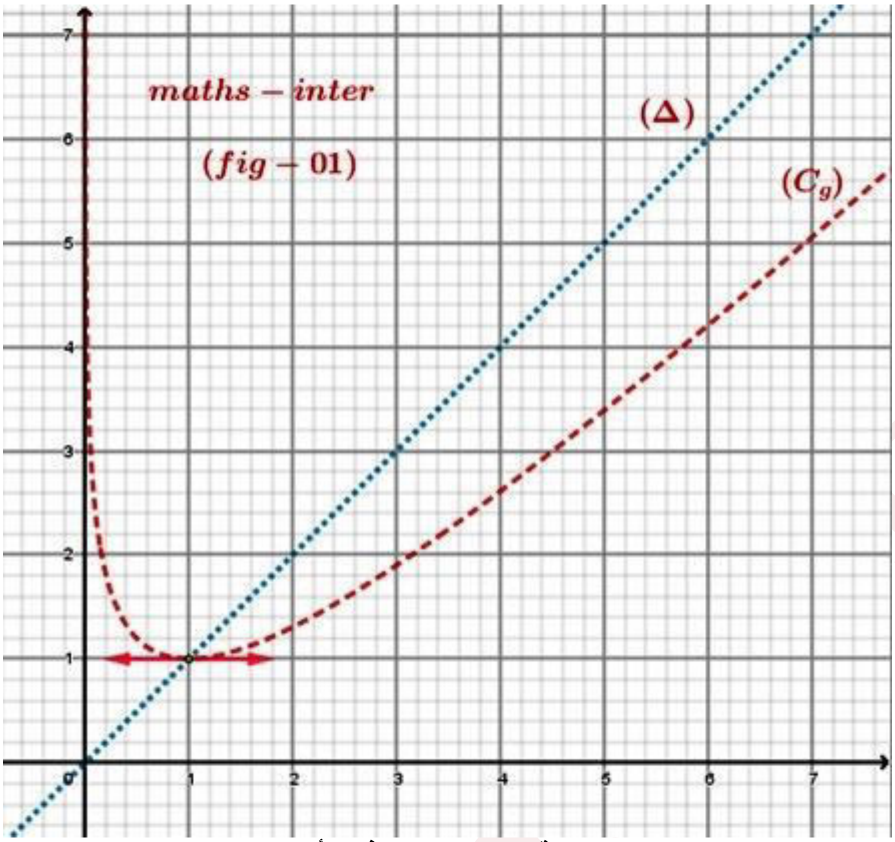
a) عين على الشكل 2 المنحنى (C_f) والمنحنى $(C_{f^{-1}})$ والمستقيم (Δ) 0,5pts

b) بين أن : $\int_1^e x\ln x\,dx=\dfrac{1+e^2}{4}$ 1pts

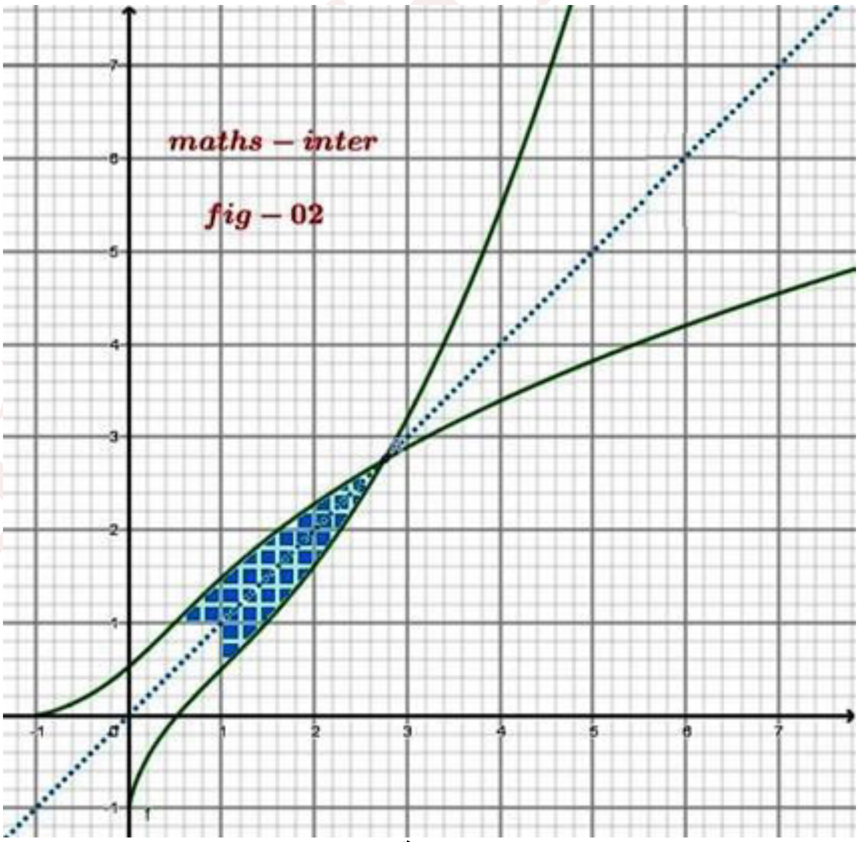
c) أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم $(\Delta): y=x$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ 0,5pts

d) استنتج مساحة الجزء المخدش في الشكل رقم 2 . 0,5pts

ملاحظة : ترجع الصفحة الأخيرة المحتوية على الشكلين مع ورقة التحرير من أجل التصحيح .



الشكل رقم 1 (الموجود في الأعلى)



الشكل رقم 2

Voir La Solution en Bas

Partie 1

$g(x) = x - \ln x$

1°) Calcul de $g(1)$:

on a $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$ d'où $(g(1) = 1)$

2°) a) Solutions de l'équation $g(x) = x$

d'après la figure-01, la courbe (C_g) coupe la droite $(\Delta) : y = x$ en un seul point $A(1,1)$ d'où l'équation admet une unique solution qui est 1 d'où :

$$(g(x) = x \iff x = 1)$$

b) Montrons que $\forall x > 1 ;\ g(x) < x$

d'après la figure-01, la courbe (C_g) se trouve en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]1,+\infty[$ d'où

$$\forall x \in]1,+\infty[;\quad g(x) < x$$

3) a) Tableau de variations de g

d'après la figure-01, la fonction g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$; d'où le tableau de variations de g

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

b) Signes de $g'(x)$

la fonction étant décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$, de plus elle admet une tangente horizontale au point $x_0 = 1$, d'où

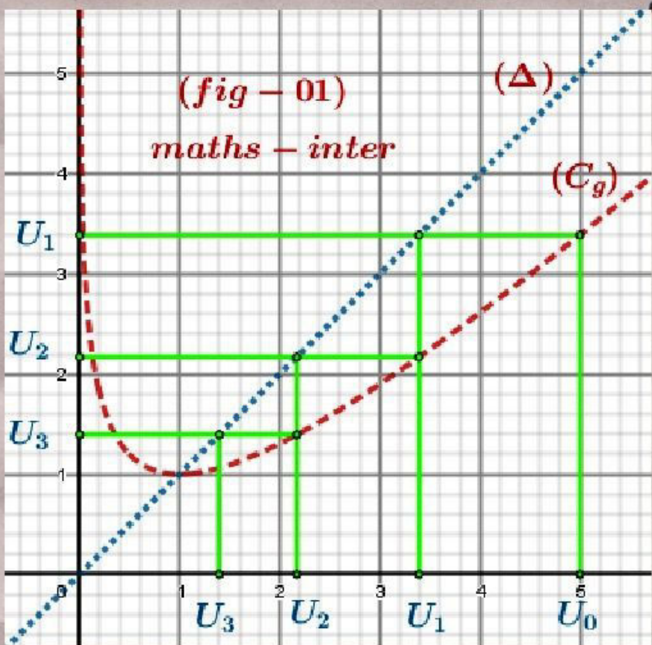
x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

c/ Montrons que $\forall x \in]0,+\infty[\,;\, 1 \leq g(x)$.

on remarque d'après le tableau de variations que 1 est une valeur minimale de la fonction g d'où : $\forall x \in]0,+\infty[\,;\, 0 \leq g(x)$

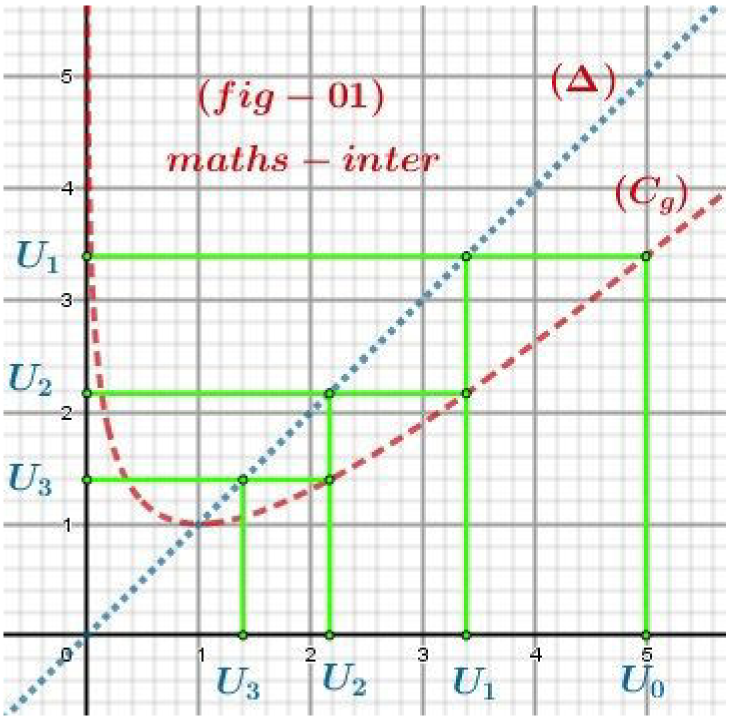
Partie 2 :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1/ Représentation des termes sur le graphique



D'après cette représentation, on peut avancer les conjectures suivantes :

* (u_n) est décroissante.
* (u_n) est minorée par 1, donc convergente
* (u_n) converge vers 1.



$(fig-01)$
$maths-inter$
(Δ)
(C_g)
U_1
U_2
U_3
U_3 U_2 U_1 U_0
0
1
2
3
4
5

2) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} ;\ 1 < U_n < 6$

Par Récurrence

* on a $1 < U_0 = 5 < 6$

* supposons que $1 < U_n < 6$

g étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$

d'où $g(1) < g(U_n) < g(6)$

or $g(1) = 1$ et puisque $1 < 6$, Alors $g(6) < 6$

d'après 2) b) Partie I

d'où $1 < U_{n+1} < 6$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < U_n < 6$

3) a) monotonie et convergence de (U_n)

on a $\forall x \in]1, +\infty[; \quad g(x) < x$ (Partie I, 2) b))

or $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < U_n$

d'où en prenant $x = U_n$, on obtient

$$g(U_n) < U_n$$

ce qui fait que $U_{n+1} < U_n$

d'où la suite (U_n) est décroissante

d'autre part (U_n) est minorée par 1

donc la suite (U_n) est convergente

b) limite de (U_n)

(U_n) étant convergente, sa limite est l'une des solutions de l'équation

$g(x) = x$, or cette équation admet une seule solution unique qui est 1 d'après Partie 1 ; 2) a) d'où $\lim U_n = 1$

2c/ a/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_0U_1 \cdots U_n = e^{2-U_{n+1}}$

on sait que $U_{n+1} = g(U_n) = U_n - \ln U_n$

d'où $\ln U_n = U_n - U_{n+1}$

d'où, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\ln U_0 &= U_0 - \cancel{U_1} \\
\ln U_1 &= \cancel{U_1} - \cancel{U_2} \\
\ln U_2 &= \cancel{U_2} - \cancel{U_3} \\
&\ \vdots \\
+ \quad \ln U_{n-1} &= \cancel{U_{n-1}} - \cancel{U_n} \\
\ln U_n &= \cancel{U_n} - U_{n+1}
\end{aligned}$$

$\ln U_0 + \ln U_1 + \ln U_2 + \cdots + \ln U_n = U_0 - U_{n+1} = 5 - U_{n+1}$

d'où : $\ln(U_0U_1U_2 \cdots U_n) = 5 - U_{n+1}$

ce qui fait : $U_0U_1U_2 \cdots U_n = e^{5 - U_{n+1}}$

b/ calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0U_1 \cdots U_n)$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = 1$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(5 - U_{n+1}) = 4$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{5-U_{n+1}} = e^4$

or $U_0U_1U_2 \cdots U_n = e^{5-U_{n+1}}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0U_1U_2 \cdots U_n) = \lim e^{5-U_{n+1}}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0U_1U_2 \cdots U_n) = e^4$

Partie : 3 : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{x^2}{2} - x\ln x \ ; 0 < x \\ f(0) = -1 \end{cases}$

1°) a) Continuité à droite de 0

on a $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1 + \frac{x^2}{2}) = 0 - 1 + 0 = -1$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ d'où

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$

Donc f est continue à droite de 0

b) Dérivabilité à droite de 0

on pose $A = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ x $f(0) = -1$

d'où $A = \frac{x \cancel{-1} + \frac{x^2}{2} - x\ln x \cancel{+1}}{x}$

d'où $A = \frac{x(1 + \frac{x}{2} - \ln x)}{x}$

d'où $A = 1 + \frac{1}{2}x - \ln x$

or $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} A = +\infty$

d'où f n'est pas dérivable à droite de 0. Mais la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale orientée vers le haut.

2°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et Branche infinie au $V(+\infty)$

on a $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\right)$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et on $\frac{f(x)}{x} = x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\right)$

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

d'où (C_f) admet Branche parabolique de direction (oy).

3/ a) Calcul de $f'(x)$

on a $f(x) = x - 1 + \frac{x^2}{2} - x\ln x$

d'où $f'(x) = 1 - 0 + x - (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})$

$f'(x) = 1 + x - \ln x - 1 = x - \ln x$

d'où $f'(x) = g(x)$

b) Calcul de $f(1)$ et variations de f

on a $f(1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$f(1) = \frac{1}{2}$

d'autre part $f'(x) = g(x)$ et $g(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ d'après Partie I 3°/ c)

d'où f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

d'où le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4°/ a/ Etude de concavité et point d'inflexion

on a $f''(x) = g'(x)$ car $f'(x) = g(x)$

or d'après Partie I 3°/ b on a

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

d'où

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
(C_f)		concave		convexe	

et comme $f''(x)$ s'annule en changeant de signe au point 1, Alors le point $A(1, \frac{1}{2})$ est le seul point d'inflexion

b/ Équation de la tangente T au point A.

on a $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

et comme $x_0 = 1$; $f(x_0) = \frac{1}{2}$ et $f'(x_0) = g(1) = 1$

Alors $(T) : y = (x-1) + \frac{1}{2}$

d'où $(T) : y = x - \frac{1}{2}$

c/ Solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0,1[$

on a $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$

d'autre part f est continue (dérivable) et strictement croissante sur $]0,1[$, d'après le TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$.

5/ a) Existence de f^{-1}

la fonction f étant continue (car dérivable) et strictement croissante de $I = [0, +\infty[$ vers $J = [-1, +\infty[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1, +\infty[$.

b) calcul de $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$

on a $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))}$

or $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 1$ car $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f'(1) = 1$ d'où $f'(f^{-1}(\frac{1}{2})) = f'(1) = 1$

d'où $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = 1$

6°/ $\varphi(x) = f(x) - x$; $x > 0$

a/ signe de $\varphi'(x)$:

on a $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1$

or $g(x) \geq 1$, pour tout $x > 0$, d'où

$(\forall x \in]0, +\infty[\; ; \; \varphi'(x) \geq 0)$

d'où φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

d'où le tableau de variations de φ

x	0		1		
$\varphi'(x)$		$+$	0	$+$	
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

b/ Solution de $\varphi(x) = 0$ sur $]2, 3[$

on a $\varphi(2) = f(2) - 2 = 2 - 1 + \cancel{2} - 2\ln 2 - \cancel{2} = 1 - 2\ln 2$

$\varphi(3) = f(3) - 3 = \cancel{3} - 1 + \frac{9}{2} - 3\ln 3 - \cancel{3} = \frac{7}{2} - 3\ln 3$

or $\ln 2 > \frac{1}{2}$ et $\ln 3 < \frac{7}{6}$

d'où $-2\ln 2 < 0$ et $0 < \frac{7}{2} - 3\ln 3$

d'où $\varphi(2) < 0$ et $0 < \varphi(3)$

d'autre part φ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[2, 3]$, d'après le TVI l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]2, 3[$

c/ Signes de $\varphi(x)$

on a $\varphi(\beta) = 0$

* si $x \in]0, \beta[$, Alors $x < \beta$ or φ est croissante strictement donc $\varphi(x) < \varphi(\beta)$ d'où $\varphi(x) < 0$
* si $x \in]\beta, +\infty[$, Alors $\beta < x$ or φ est croissante strictement donc $\varphi(\beta) < \varphi(x)$ d'où $0 < \varphi(x)$

d'où

x	0		2		β		3		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Position relative de (C_f) et (Δ)

* on a $\varphi(\beta)=0$ d'où $f(\beta)=\beta$

d'où le point $B(\beta, \beta)$ est un point d'intersection entre (C_f) et (Δ)

* Si $x \in]0, \beta[$ Alors $\varphi(x)<0$ d'où $f(x)-x<0$

d'où $f(x)<x$

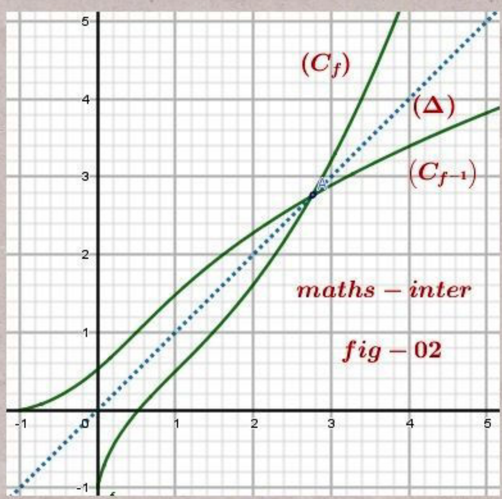
d'où (C_f) est en dessous de (Δ)

* Si $x \in]\beta, +\infty[$ Alors $0<\varphi(x)$ d'où $f(x)-x>0$

d'où $f(x)>x$

d'où (C_f) est au dessus de (Δ).

7/ a/ (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ voir en dessous



b/ Calcul de $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

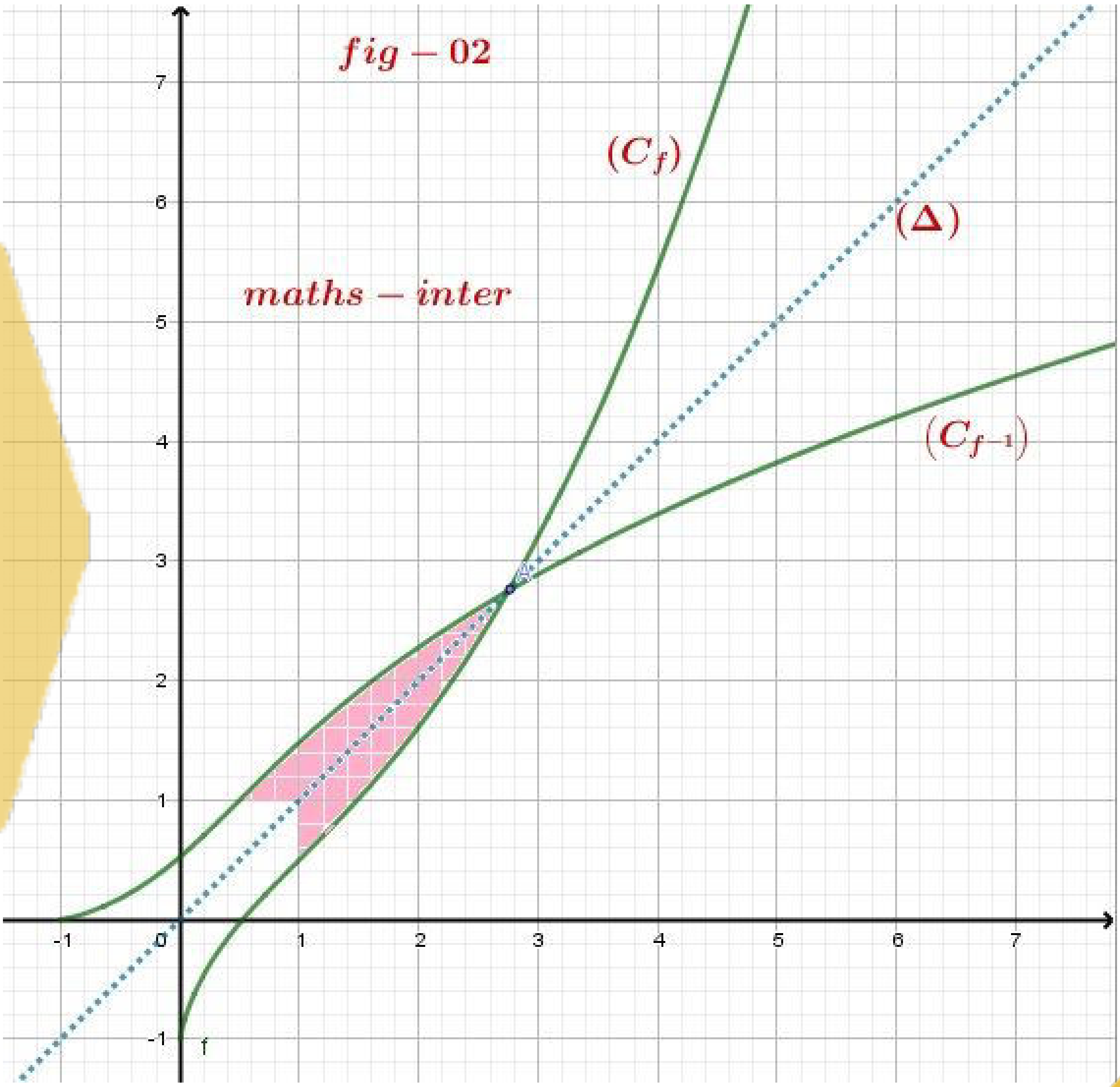
on pose $u = \ln x$ $\quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = x$ $\quad v = \frac{1}{2}x^2$

d'où $I = \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x \, dx$

$I = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^e = \frac{2e^2}{4} - \frac{1}{4}(e^2-1)$

$I = \frac{e^2+1}{4}$



$fig-02$
$maths-inter$
(C_f)
(Δ)
$(C_{f^{-1}})$
7
6
5
4
3
2
1
-1
0
f

c/ calcul d'aire :

Soit S l'aire du domaine délimité par (C_f) ; (Δ) et les droites d'équations $x=1$; $x=e$

Alors $S = \int_1^e (x - f(x))\, dx = \int_1^e \left(1 - \frac{x^2}{2} + x\ln x\right) dx$

$S = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + \int_1^e x\ln x\, dx$

or $\int_1^e x\ln x\, dx = \frac{e^2+1}{4}$

et $\int_1^e \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_1^e$

$= \left(e - \frac{e^3}{6}\right) - \left(1 - \frac{1}{6}\right)$

$= e - \frac{e^3}{6} - \frac{5}{6}$

d'où $S = e - \frac{1}{6}e^3 - \frac{5}{6} + \frac{e^2+1}{4}$

$S = \frac{1}{24}\left(6e^2 + 6 + 24e - 4e^3 - 20\right)$

$S = \frac{1}{24}\left(6e^2 - 4e^3 + 24e - 14\right)$ UA

d/ calcul de la surface du domaine hachuré

Soit S' l'aire du domaine hachuré

on remarque que

$S' = 2S = \frac{1}{12}\left(6e^2 - 4e^3 + 24e - 14\right)$ UA