Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie : I

On considère la fonction numérique g définie dans $\left]0,+\infty\right[$ par : $g(x)=x-\ln x$.
(C_g) est la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
La figure n° :01 en dessous (fig _ 01) est constituée de la courbe (C_g) et de la droite (Δ) d'équation $y=x$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Calculer $g(1)$. 0,5pts
2) En se basant sur la figure 01, répondre graphiquement aux questions suivantes :
   a) Résoudre l'équation $g(x)=x$ sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$. 0,5pts
   b) Montrer que : $\forall x\in\left]1,+\infty\right[$; $g(x)<x$. 1pts
3) En se basant sur la figure 01, répondre graphiquement aux questions suivantes :
   a) Dresser le tableau de variations de la fonction g . 0,5pts
   b) En déduire le tableau de signes de $g'(x)$. Justifier votre réponse 0,5pts
   c) Montrer que : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$; $1\leq g(x)$.

Partie : II

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0=5 \\ (\forall n\in \mathbb{N}) \ ; \ U_{n+1}=g(U_n) \end{cases}$

1) Représenter les termes U_0 ، U_1 ، U_2 et U_3 sur l'axe des abscisses du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de la figure 1. En déduire des conjectures concernant la monotonie, la convergence et la limite de la suite (U_n) ? 1pts
2) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})$; $1<U_n<6$. 1pts
3) a) Montrer que (U_n) est décroissante en déduire qu'elle est convergente. 0,5pts
   b) Déterminer la limite de (U_n) . 0,5pts
4) a) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N})$; $U_0U_1....U_n=e^{5-U_{n+1}}$ 1pts
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0U_1....U_n)$ 0,5pts

Partie : II

On considère la fonction numérique g définie dans $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x)=x-1+\dfrac{x^2}{2}-x\ln x \ ; \ 0<x \\ f(0)=-1 \end{cases}$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0 . 0,5pts
   b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu 0,5pts

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis étudier la nature de la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. 1pts

3) a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $f'(x)=g(x)$ 0,5pts

b) Calculer $f(1)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f . 0,5pts

4) a) Etudier la concavité de (C_f) et montre qu'elle admet un point d'inflexion unique $A(1;\frac{1}{2})$ 1pts

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'inflexion A 0,5pts .

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à $]0,1[$. 1pts

5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera . 1pts

b) Déterminer $(f^{-1})'(1/2)$ 0,5pts .

6) On pose pour tout x de $]0,+\infty[$: $\varphi(x)=f(x)-x$

a) Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$; $\varphi'(x)\geq 0$, puis dresser le tableau de variations de φ sur $]0,+\infty[$ 0,5pts .

b) Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β appartenant à $]2,3[$. 0,5pts

(On admet que $\ln 2 > \frac{1}{2}$ et que $\ln 3 < \frac{7}{6}$)

c) Etudier les signes de $\varphi(x)$, en déduire la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (Δ) ; $y=x$. 0,5pts

Remarque : On considère pour toute la suite du problème que $\beta = e$

La figure n° :02 en dessous (fig _ 02) est constituée des deux courbe (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ et de la droite (Δ) d'équation $y=x$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Désigner chacune des courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sur la figure 2 en dessous. 0,5pts

b) Montrer que : $\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{1+e^2}{4}$ 1pts

c) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$ 0,5pts

d) En déduire l'aire du domaine hachuré sur la figure 2 en dessous. 0,5pts

Remarque :

La dernière page contenant les figures 1 et 2 doit être rendue avec la copie pour Correction

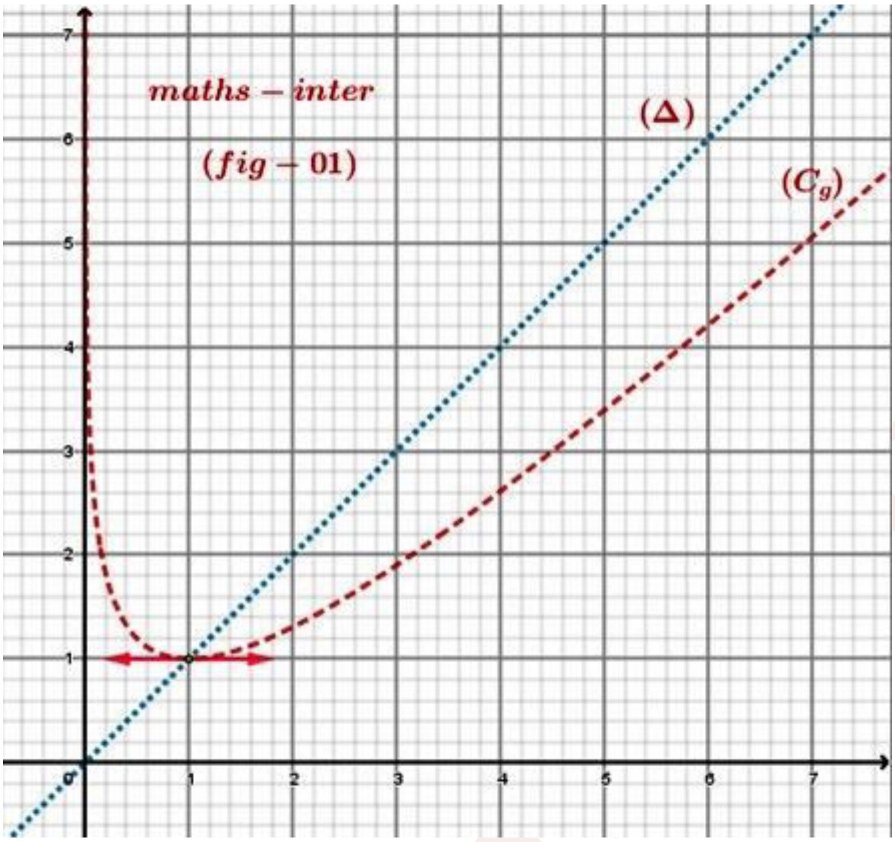


Figure - 01 (en haut)

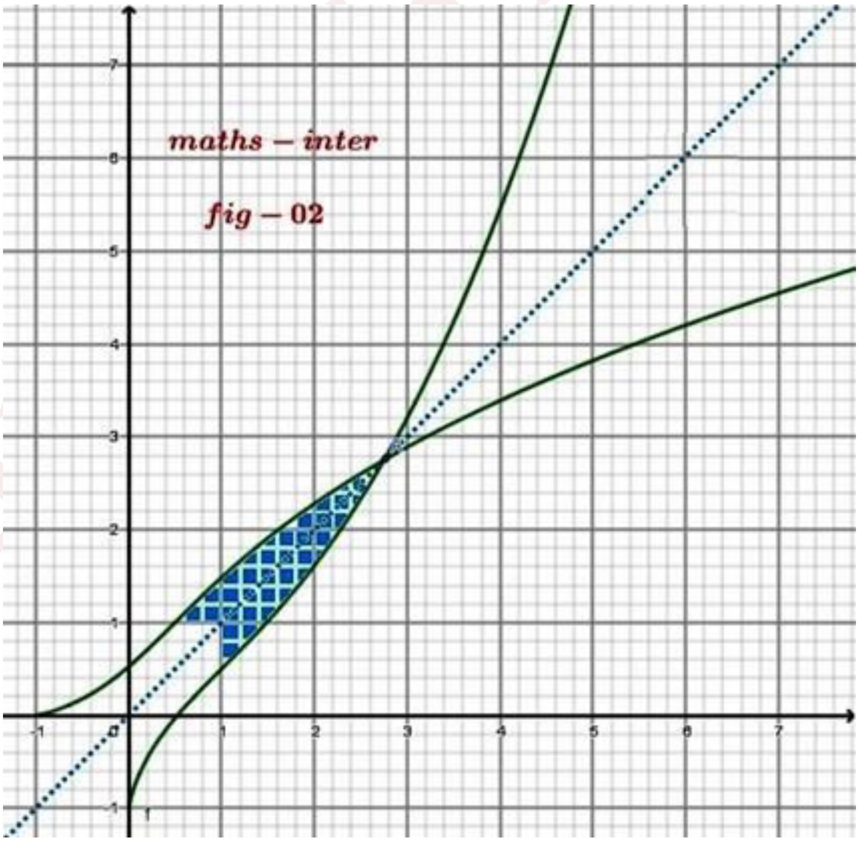


Figure - 02

Voir La Solution en Bas

Partie 1 $\quad g(x) = x - \ln x$

1°) Calcul de $g(1)$:

on a $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$ d'où $(g(1) = 1)$

2°) a) Solutions de l'équation $g(x) = x$

d'après la figure -01, la courbe (C_g) coupe la droite $(\Delta) : y = x$ en un seul point $A(1,1)$ d'où l'équation admet une unique solution qui est 1 d'où :

$$(g(x) = x \iff x = 1)$$

b) Montrons que $\forall x > 1 ;\ g(x) < x$

d'après la figure -01, la courbe (C_g) se trouve en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]1, +\infty[$ d'où

$$\forall x \in]1, +\infty[;\quad g(x) < x$$

3) a) Tableau de variations de g

d'après la figure -01, la fonction g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$; d'où le tableau de variations de g

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

b) Signes de $g'(x)$

la fonction étant décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, de plus elle admet une tangente horizontale au point $x_0 = 1$, d'où

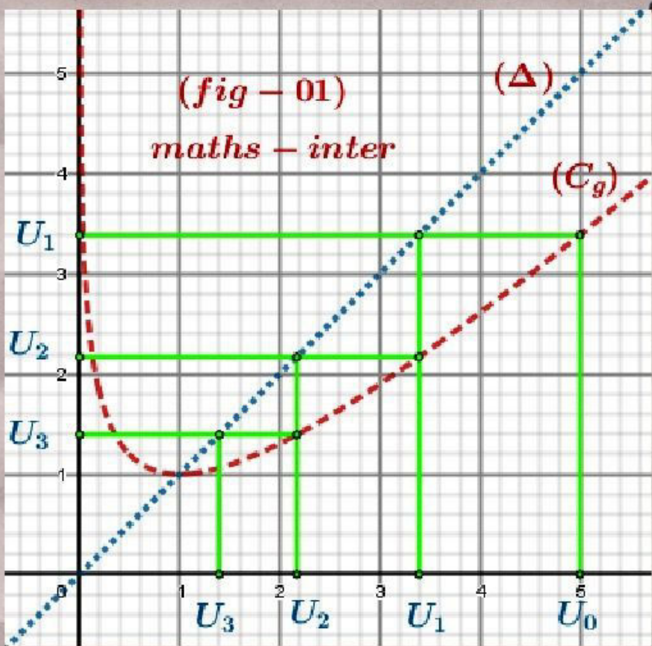
x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

c/ Montrons que $\forall x \in]0,+\infty[;\ 1 \leq g(x)$.

on remarque d'après le tableau de variations que 1 est une valeur minimale de la fonction g d'où : $\forall x \in]0,+\infty[;\ 0 \leq g(x)$

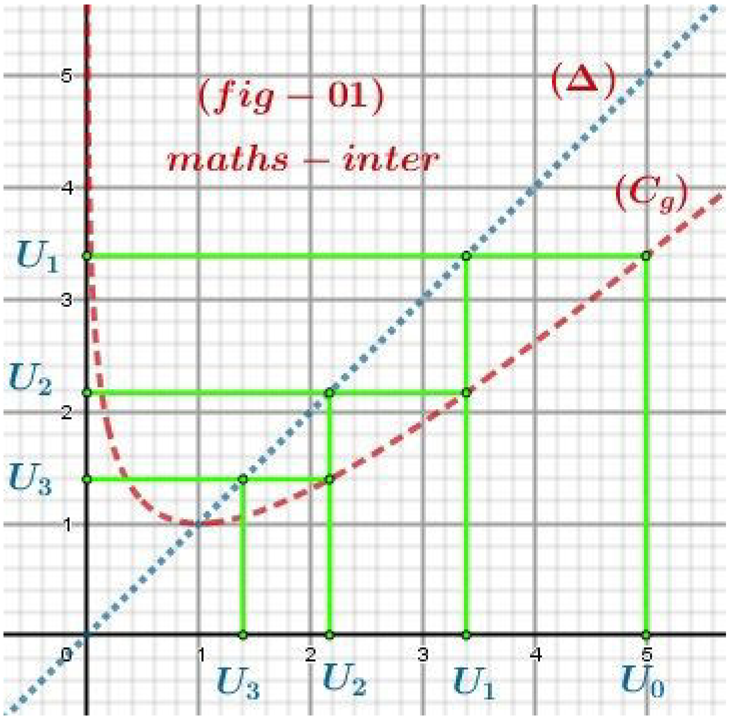
Partie 2 : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

1/ Représentation des termes sur le graphique



D'après cette représentation, on peut avancer les conjectures suivantes :

* (u_n) est décroissante.
* (u_n) est minorée par 1, donc convergente
* (u_n) converge vers 1.



(fig − 01)
maths − inter
(Δ)
(C_g)
U_1
U_2
U_3
U_0
0
1
2
3
4
5

2) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 < U_n < 6$

Par Récurrence

* on a $1 < U_0 = 5 < 6$
* supposons que $1 < U_n < 6$

g étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$

d'où $g(1) < g(U_n) < g(6)$.

or $g(1) = 1$ et puisque $1 < 6$, Alors $g(6) < 6$

d'après 2) b) Partie I

d'où $1 < U_{n+1} < 6$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 < U_n < 6$

3) a) monotonie et convergence de (U_n)

on a $\forall x \in]1, +\infty[$; $g(x) < x$ (Partie I, 2) b))

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 < U_n$

d'où en prenant $x = U_n$, on obtient

$g(U_n) < U_n$

ce qui fait que $U_{n+1} < U_n$

d'où la suite (U_n) est décroissante

d'autre part (U_n) est minorée par 1

donc la suite (U_n) est convergente

b) limite de (U_n)

(U_n) étant convergente, sa limite est l'une des solutions de l'équation

$g(x) = x$, or cette équation admet une seule solution unique qui est 1

d'après Partie 1 ; 2) a) d'où $\lim U_n = 1$

2c/ a/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_0 U_1 \cdots U_n = e^{2-U_{n+1}}$

on sait que $U_{n+1} = g(U_n) = U_n - \ln U_n$

d'où $\ln U_n = U_n - U_{n+1}$

d'où, on obtient successivement :

$$
\begin{aligned}
\ln U_0 &= U_0 - \cancel{U_1} \\
\ln U_1 &= \cancel{U_1} - \cancel{U_2} \\
\ln U_2 &= \cancel{U_2} - \cancel{U_3} \\
+ \quad &\vdots \\
\ln U_{n-1} &= \cancel{U_{n-1}} - \cancel{U_n} \\
\ln U_n &= \cancel{U_n} - U_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$\ln U_0 + \ln U_1 + \ln U_2 + \cdots + \ln U_n = U_0 - U_{n+1} = 5 - U_{n+1}$$

d'où : $\ln(U_0 U_1 U_2 \cdots U_n) = 5 - U_{n+1}$

ce qui fait : $U_0 U_1 U_2 \cdots U_n = e^{5 - U_{n+1}}$

b/ calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0 U_1 \cdots U_n)$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = 1$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(5 - U_{n+1}) = 4$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{5-U_{n+1}} = e^4$

or $U_0 U_1 U_2 \cdots U_n = e^{5-U_{n+1}}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0 U_1 U_2 \cdots U_n) = \lim e^{5-U_{n+1}}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_0 U_1 U_2 \cdots U_n) = e^4$

Partie : 3 : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{x^2}{2} - x\ln x \ ; 0 < x \\ f(0) = -1 \end{cases}$

1) a) Continuité à droite de 0

on a $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1 + \frac{x^2}{2}) = 0 - 1 + 0 = -1$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ d'où

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$$

Donc f est continue à droite de 0

b) Dérivabilité à droite de 0

on pose $A = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$; $f(0) = -1$

d'où $A = \frac{x \cancel{-1} + \frac{x^2}{2} - x\ln x \cancel{+1}}{x}$

d'où $A = \frac{x(1 + \frac{x}{2} - \ln x)}{x}$

d'où $A = 1 + \frac{1}{2}x - \ln x$

or $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} A = +\infty$

d'où f n'est pas dérivable à droite de 0. Mais la courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale orientée vers le haut.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et branche infinie au $V(+\infty)$

on a $f(x) = x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\right)$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et on $\frac{f(x)}{x} = x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\right)$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

d'où (C_f) admet Branche parabolique de direction (oy).

3/ a) Calcul de $f'(x)$

on a $f(x) = x - 1 + \frac{x^2}{2} - x\ln x$

d'où $f'(x) = 1 - 0 + x - \left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = 1 + x - \ln x - 1 = x - \ln x$

d'où $f'(x) = g(x)$

b) Calcul de $f(1)$ et variations de f

on a $f(1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

$f(1) = \frac{1}{2}$

d'autre part $f'(x) = g(x)$ et $g(x) \geq 1 > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ d'après Partie I 3°/c)

d'où f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

d'où le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4°/ a/ Etude de concavité et point d'inflexion

on a $f''(x) = g'(x)$ car $f'(x) = g(x)$

or d'après Partie I 3°/b on a

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

d'où

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
(C_f)		concave		convexe	

et comme $f''(x)$ s'annule en changeant de signe au point 1, alors le point $A(1, \frac{1}{2})$ est le seul point d'inflexion

b/ Équation de la tangente T au point A.

on a $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

et comme $x_0 = 1$; $f(x_0) = \frac{1}{2}$ et $f'(x_0) = g(1) = 1$

Alors $(T) : y = (x-1) + \frac{1}{2}$

d'où $(T) : y = x - \frac{1}{2}$

c/ Solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0,1[$

on a $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$

d'autre part f est continue (dérivable) et strictement croissante sur $]0,1[$, d'après le TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$.

5/ a) Existence de f^{-1}

la fonction f étant continue (car dérivable) et strictement croissante de $I = [0, +\infty[$ vers $J = [-1, +\infty[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1, +\infty[$.

b) calcul de $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$

on a $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))}$

or $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 1$ car $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f'(1) = 1$ d'où $f'(f^{-1}(\frac{1}{2})) = f'(1) = 1$

d'où $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = 1$

6°/ $\varphi(x) = f(x) - x \;;\; x > 0$

a/ Signe de $\varphi'(x)$:

on a $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1$

or $g(x) \geq 1$, pour tout $x > 0$, d'où

$(\forall x \in]0, +\infty[\;;\; \varphi'(x) \geq 0)$

d'où φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

d'où le tableau de variations de φ

x	0		1		
$\varphi'(x)$		+	0	+	
$\varphi(x)$	-1	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	

b/ Solution de $\varphi(x) = 0$ sur $]2, 3[$

on a $\varphi(2) = f(2) - 2 = 2 - 1 + \cancel{2} - 2\ln 2 - \cancel{2} = 1 - 2\ln 2$

$\varphi(3) = f(3) - 3 = \cancel{3} - 1 + \frac{9}{2} - 3\ln 3 - \cancel{3} = \frac{7}{2} - 3\ln 3$

or $\ln 2 > \frac{1}{2}$ et $\ln 3 < \frac{7}{6}$

d'où $1 - 2\ln 2 < 0$ et $0 < \frac{7}{2} - 3\ln 3$

d'où $\varphi(2) < 0$ et $0 < \varphi(3)$

d'autre part φ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[2, 3]$, d'après le TVI l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\beta \in]2, 3[$

c/ Signes de $\varphi(x)$

on a $\varphi(\beta) = 0$

* si $x \in]0, \beta[$, alors $x < \beta$ or φ est croissante strictement donc $\varphi(x) < \varphi(\beta)$ d'où $\varphi(x) < 0$
* si $x \in]\beta, +\infty[$, alors $\beta < x$ or φ est croissante strictement donc $\varphi(\beta) < \varphi(x)$ d'où $0 < \varphi(x)$

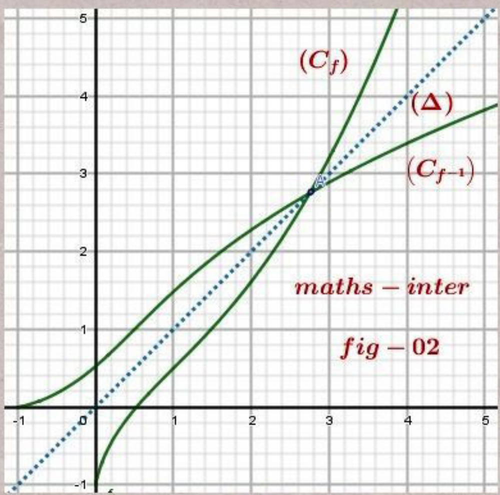
d'où

x	0		2		β		3		$+\infty$
$\varphi(x)$		−		−	0	+		+	

Position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ)

* on a $\varphi(\beta)=0$ d'où $f(\beta)=\beta$
d'où le point $B(\beta,\beta)$ est un point d'intersection entre $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ)
* Si $x\in]0,\beta[$ Alors $\varphi(x)<0$ d'où $f(x)-x<0$
d'où $f(x)<x$
d'où $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de (Δ)
* Si $x\in]\beta,+\infty[$ Alors $0<\varphi(x)$ d'où $f(x)-x>0$
d'où $f(x)>x$
d'où $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (Δ).

7/ a/ $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ voir en dessous



b/ Calcul de $I=\int_1^e x\ln x\,dx$

on pose $u=\ln x$ $\quad u'=\frac{1}{x}$
$v'=x$ $\quad v=\frac{1}{2}x^2$

d'où $I=\frac{1}{2}\left[x^2\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

$I=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^e=\frac{2e^2}{4}-\frac{1}{4}(e^2-1)$

$I=\frac{e^2+1}{4}$

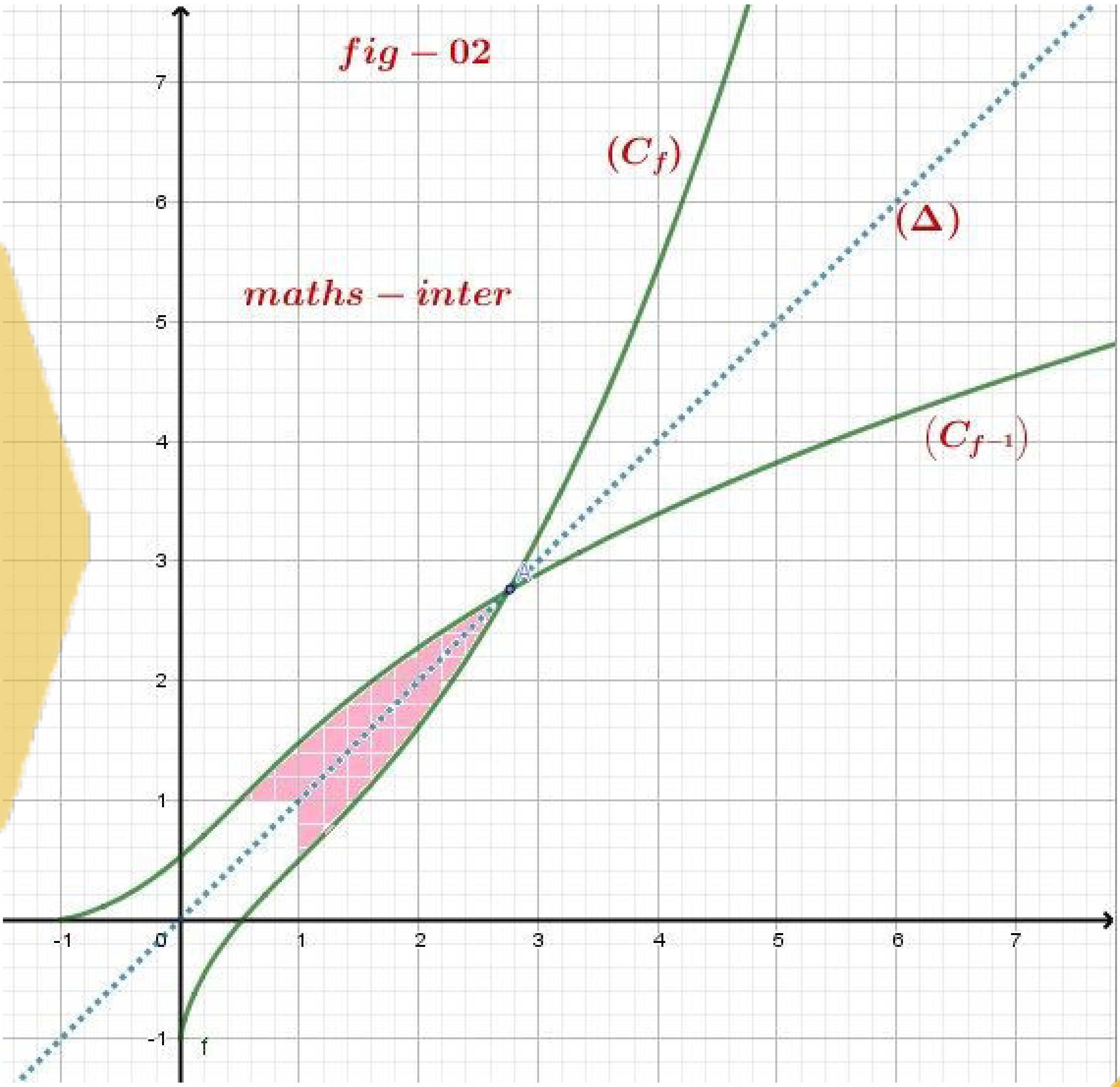


fig – 02
maths – inter
(C_f)
(Δ)
(C_{f^{-1}})

c/ calcul d'aire :

Soit S l'aire du domaine délimité par (C_f) ; (Δ) et les droites d'équations $x=1$; $x=e$

Alors $S = \int_1^e (x - f(x))\,dx = \int_1^e (1 - \frac{x^2}{2} + x\ln x)\,dx$

$S = \int_1^e (1 - \frac{1}{2}x^2) + \int_1^e x\ln x\,dx$

or $\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4}$

et $\int_1^e (1 - \frac{1}{2}x^2)\,dx = \left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_1^e$

$= \left(e - \frac{e^3}{6}\right) - \left(1 - \frac{1}{6}\right)$

$= e - \frac{e^3}{6} - \frac{5}{6}$

d'où

$S = e - \frac{1}{6}e^3 - \frac{5}{6} + \frac{e^2+1}{4}$

$S = \frac{1}{24}(6e^2 + 6 + 24e - 4e^3 - 20)$

$S = \frac{1}{24}(6e^2 - 4e^3 + 24e - 14)$ UA

d/ calcul de la surface du domaine hachuré

Soit S' l'aire du domaine hachuré

on remarque que

$S' = 2S = \frac{1}{12}(6e^2 - 4e^3 + 24e - 14)$ UA