Partie : I On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=1-xe^{x}$.

1) a) Calculer : $h(-1)$, $h(0)$ et $h(1)$. 0,25pts 0,25pts 0,25pts

b) vérifier que : $h\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\sqrt{e}$ et $h(\ln 2)=1-2\ln 2$. 0,25pts 0,25pts

c) Sachant que $e<4$, étudier les signes de chacun des nombres $h\left(\frac{1}{2}\right)$ et $h(\ln 2)$. 0,25pts 0,25pts

2) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. 0,25pts 0,25pts

b) Etudier les branches infinies de (C_h) . 0,25pts 0,25pts

c) Etudier la position relative de la courbe (C_h) et la droite $(D): y=1$. 0,25pts

3) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $h'(x)=-(x+1)e^{x}$. 0,25pts

b) En déduire le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$. 0,25pts

4) a) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α telle que $\frac{1}{2}<\alpha<\ln 2$. 0,25pts

b) En déduire le tableau de signe $h(x)$. 0,25pts

5) a) Montrer que $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$ et que $\ln\alpha=-\alpha$, en déduire que $h'(\alpha)=-\frac{\alpha+1}{\alpha}$. 0,25pts 0,25pts 0,25pts

b) Calculer $h'(0)$ ، puis déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_h) au point 0 . 0,25pts

6) Construire (T) et (C_h) dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. On prend $\alpha\approx 0,6$. 0,25pts 0,25pts

7) Soit t un nombre réel strictement négatif .

a) Montrer que en utilisant une intégration par parties que : $\int_t^0 xe^{x}dx=(1-t)e^{t}-1$. 0,25pts

b) En déduire l'aire $A(t)$ du domaine délimité par (C_h), la droite $(D): y=1$ et la droite $(\Delta): x=t$, en fonction de t . 0,25pts

c) Calculer $\lim\limits_{t\to-\infty} A(t)$. 0,25pts

Partie : II On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln x-e^{x}+4$.

1) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,25pts 0,25pts

b) Etudier les branches infinies de (C_f) . 0,25pts 0,25pts

c) Prouver que $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2-4\alpha+1}{\alpha}$. 0,25pts

2) a) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$; $f'(x)=\frac{h(x)}{x}$. 0,25pts

b) En déduire le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$. 0,25pts

3) Construire (C_f) sur le même repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. On prend $\alpha\approx 0,6$ et $f(\alpha)\approx 1,7$. (0,5pts

4) a) Montrer que la fonction $G(x)=x\ln x-x$ est une primitive de $g(x)=\ln x$. 0,25pts

b) Montrer que $\int_\alpha^1 \ln x\,dx=\alpha^2+\alpha-1$, et que $\int_\alpha^1 e^{x}dx=e-\frac{1}{\alpha}$. 0,25pts 0,25pts

5) Soit S l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites $(\Delta_1): x=\alpha$ et $(\Delta_2): x=1$. Montrer que : $S=\frac{1}{\alpha}+\alpha^2-3\alpha+3-e$, puis donner une valeur approchée de S . 0,25pts 0,25pts

Voir la Solution en Bas

Partie I : $h(x) = 1 - xe^{x}$

1°) a) Calcul de $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$:

on a $h(-1) = 1 + \frac{1}{e}$

$h(0) = 1$ et $h(1) = 1 - e$

b) Calcul de $h(\frac{1}{2})$ et $h(\ln 2)$:

on a $h(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2}e^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{e}$

$h(\ln 2) = 1 - (\ln 2)e^{\ln 2} = 1 - 2\ln 2$

c) Signe de $h(\frac{1}{2})$ et de $h(\ln 2)$

on a $e < 4$ d'où : $\sqrt{e} < 2$ et $\ln e < \ln 4$

d'où $-1 < -\frac{1}{2}\sqrt{e}$ et $1 < \ln 2^{2}$

d'où $0 < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{e}$ et $1 - 2\ln 2 < 0$

d'où $0 < h(\frac{1}{2})$ et $h(\ln 2) < 0$

2°) a) Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$:

on a $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$

et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

b) Etude des Branches infinie de (C_h)

on a $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$

donc la droite d'équation $y = 1$ est une Asymptote horizontale de (C_h) au voisinage de $-\infty$

et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

or $\frac{h(x)}{x} = \frac{1}{x} - e^{x}$ et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = -\infty$ d'où (C_h) admet une Branche parabolique de direction (oy) au $V(+\infty)$.

c/ Position relative de (C_h) et de (D)

(D) est la droite d'équation $y = 1$

on a $d(x) = h(x) - y = -xe^x$ or $e^x > 0$

d'où $d(x)$ est de même signe que $-x$

d'où

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$d(x)$	$+$ 0	$-$
(C_h) et (D)	(C_h) est au dessus de (D)	(C_h) est en dessous de (D)
	$A\binom{0}{1}$ point d'$\cap$	

3°) a/ Calcul de $h'(x)$:

on a $h(x) = 1 - xe^x$ d'où

$h'(x) = 0 - (e^x + xe^x) = -(x+1)e^x$

b/ Tableau de variations de h

on a $h'(x) = -(x+1)e^x$ or $e^x > 0$ d'où

$h'(x)$ est de même signe que $-(x+1)$

d'où le tableau de variations de la fonction h

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

4°) a) solution de $h(x) = 0$ sur $]\frac{1}{2}, \ln 2[$

on a d'après Partie I 1°) c)

$h(\frac{1}{2}) \times h(\ln 2) < 0$ or h est continue (car elle est dérivable) et strictement décroissante sur ~~sur~~ $[\frac{1}{2}, \ln 2]$ (Tableau de variations)

d'après le TVI, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]\frac{1}{2}, \ln 2[$

b) Tableau de signe de $h(x)$.

d'après le tableau de variation de h

on remarque que

$\forall x \in]-\infty, -1]$; $1 < h(x)$

d'où $\forall x \in]-\infty,-1]$; $0<h(x)$

d'autre part h est décroissante sur $[-1,+\infty[$

Si $-1\leq x<\alpha$ Alors $h(\alpha)<h(x)$ et $h(\alpha)=0$

d'où $\forall x\in[-1,\alpha[$; $0<h(x)$

Si $\alpha<x$ Alors $h(x)<h(\alpha)$ et $h(\alpha)=0$

d'où $\forall x\in]\alpha,+\infty[$; $h(x)<0$

d'où le tableau des signes de $h(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

5/ a) Montrons que $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$ et $\ln\alpha=-\alpha$

α étant solution de $h(x)=0$ d'où $1-\alpha e^{\alpha}=0$ d'où $\alpha e^{\alpha}=1$ et par suite $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$ et $\alpha=\ln\frac{1}{\alpha}$

d'où on a aussi $\ln\alpha=-\alpha$

Déduction : on a $h'(\alpha)=-(\alpha+1)e^{\alpha}$

d'où $h'(\alpha)=-(\alpha+1)\times\frac{1}{\alpha}$ ce qui fait

$$h'(\alpha)=-\frac{\alpha+1}{\alpha}$$

b) Equation de la tangente (T)

(T) étant la tangente au point 0

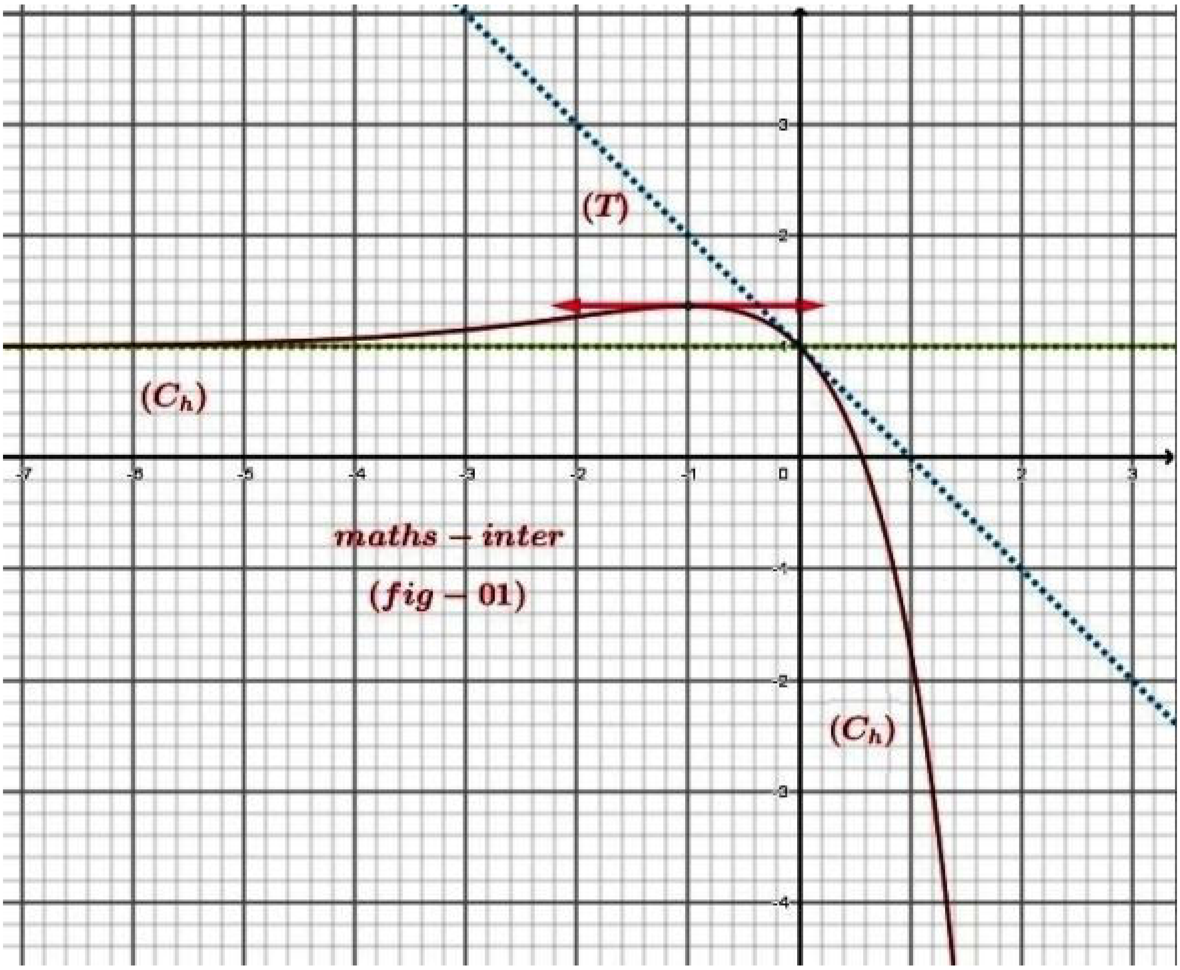
on a $h'(0)=-(0+1)e^{0}=-1$

l'équation de (T) s'écrit :

$$(T) : y = h'(0)(x-0)+h(0)$$

d'où $(T) : y=-x+1$

d'où $(T) : y=-x+1$



(T)
(C_h)
maths − inter
(fig − 01)
(C_h)

7/ t est un réel strictement positif

a/ calcul de $I_t = \int_t^0 xe^x dx$

Posons $u = x \quad u' = 1$

$v' = e^x \quad v = e^x$ d'où

$I_t = [xe^x]_t^0 - \int_t^0 e^x dx = -te^t - [e^x]_t^0$

$I_t = -te^t - (1 - e^t)$ d'où

$\left(\int_t^0 xe^x dx = (1-t)e^t - 1 \right)$

b) calcul de $A(t)$

d'après les données, on a : $A(t) = \int_t^0 (h(x) - 1) dx$

or $h(x) - 1 = 1 - xe^x - 1 = -xe^x$

d'où $A(t) = -\int_t^0 xe^x dx$ et d'après la question précédente, on obtient

$A(t) = (t-1)e^t + 1$

c/ calcul de $\lim_{t \to -\infty} A(t)$

on a $A(t) = te^t - e^t + 1$

or $\lim_{t \to -\infty} te^t = 0$ et $\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$

d'où $\left(\lim_{t \to -\infty} A(t) = 1 \right)$

Partie : II $x \in]0,+\infty[$; $f(x) = \ln x - e^x + 4$

1/ a) calcul de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

*) on a $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$

d'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

*) on a $f(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x}\right) + 4$

or $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$; $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

d'où $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

b) Etude des branches infinie de (C_f)

* on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, d'où

la droite d'équation $y=0$ (Axe (ox)) est une Asymptote horizontale de (C_f) à droite de 0.

* on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x} + \frac{4}{x}$

or $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{+\infty} \frac{4}{x} = 0$ et $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

d'où $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

d'où la courbe (C_f) admet une Branche parabolique de direction (oy)

c/ calcul de $f(\alpha)$

on a $f(\alpha) = \ln\alpha - e^\alpha + 4$ or

$e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ et $\ln\alpha = -\alpha$ d'où

$f(\alpha) = -\alpha - \frac{1}{\alpha} + 4$ d'où

$f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 - 4\alpha + 1}{\alpha}$

2°/ a) calcul de $f'(x)$

on a $f(x) = \ln x - e^x + 4$ d'où

$$f'(x) = \frac{1}{x} - e^x = \frac{1 - xe^x}{x}$$

d'où $$f'(x) = \frac{h(x)}{x}$$

b) Tableau de variations de f.

on a $x > 0$ donc $f'(x)$ est de même signe que $h(x)$ or

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$		+	0	−	

d'où le tableau de variation de la fonction f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3°/ courbe de la fonction f

(voir la page suivante en dessous)

4°/ a) G primitive de g

on a $G(x) = x\ln x - x$ et $g(x) = \ln x$

on a $G'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = g(x)$ d'où G est une primitive de g.

b) on a $\int_\alpha^1 \ln x \, dx = [x\ln x - x]_\alpha^1 = -1 - (\alpha \ln \alpha - \alpha)$

$= -1 - \alpha(-\alpha) + \alpha = \alpha^2 + \alpha - 1$

et on a $\int_\alpha^1 e^x dx = [e^x]_\alpha^1 = e - e^\alpha = e - \frac{1}{\alpha}$

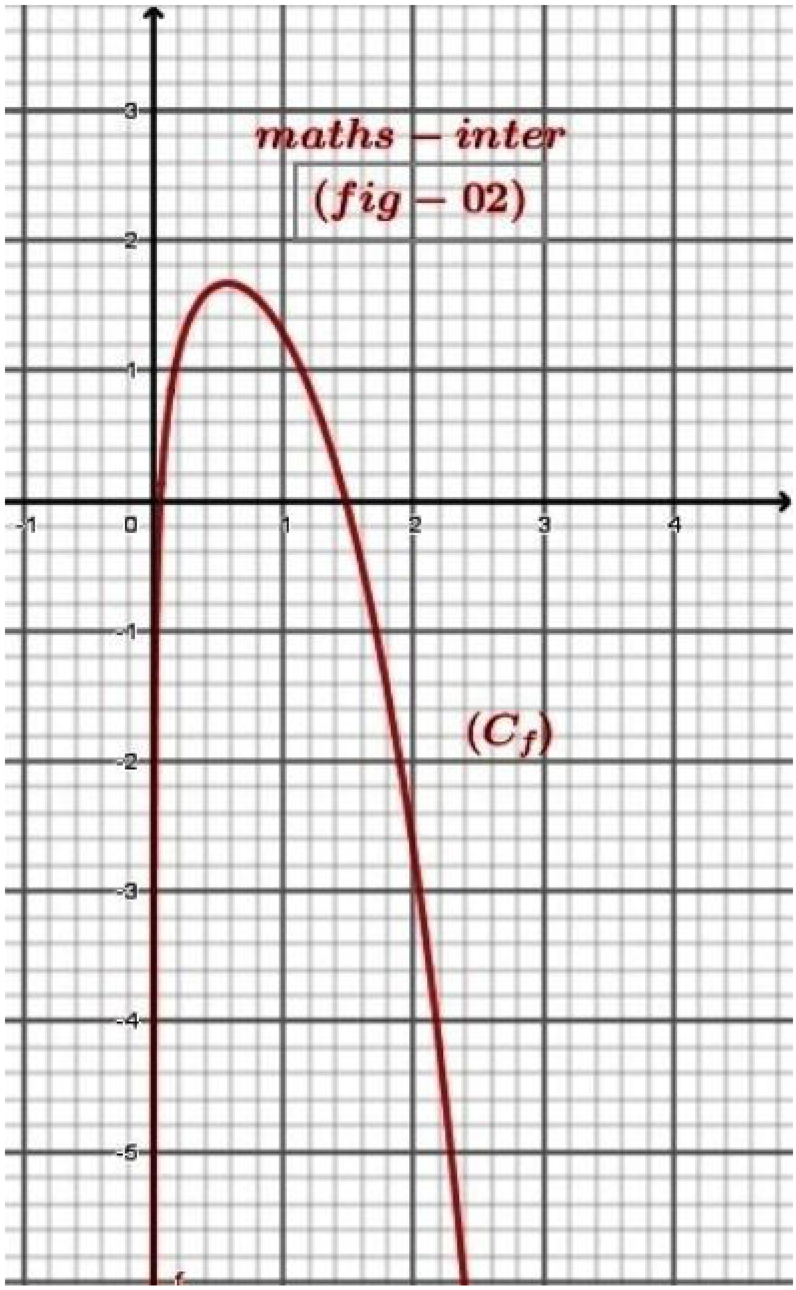
5°/ d'après les données, on a

$$S = \int_\alpha^1 f(x)\,dx = \int_\alpha^1 (\ln x - e^x + 4)\,dx$$

$$S = \int_\alpha^1 \ln x\,dx - \int_\alpha^1 e^x dx + 4\int_\alpha^1 dx$$

$$S = \alpha^2 + \alpha - 1 - e + \frac{1}{\alpha} + 4(1-\alpha)$$

$$S = \frac{1}{\alpha} + \alpha^2 - 3\alpha + 3 - e$$



$maths - inter$
$(fig - 02)$
(C_f)
-1
0
1
2
3
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5