Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2018 – Ss1

Soit p un nombre premier tel que $p = 3 + 4k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$.

1) Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2 \equiv 1[p]$ alors $x^{p-5} \equiv 1[p]$

2) Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5} \equiv 1[p]$.
   a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.
   b) Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1[p]$.
   c) Vérifier que : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$
   d) En déduire que : $x^2 \equiv 1[p]$

3) Résoudre dans Z l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2017 – Ss1

On admet que le nombre 2017 est premier et que $2016 = 2^5 3^2 7$

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

1) Soit le couple (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$
   a) Vérifier que : $p < 2017$.
   b) Montrer que : p ne divise pas y.
   c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1[p]$ puis en déduire que p divise 2016.
   d) Montrer que : $p = 7$

2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couple (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss1

Partie : I Soit le couple (a,b) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise: $a^3 + b^3$

1) Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$ (remarquer que : $171 = 3 \times 57$)
2) Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b
3) On suppose que 173 divise a, montrer que 173 divise $a + b$
4) On suppose que 173 ne divise pas a
   a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $a^{171} \equiv b^{171}[173]$
   b) Montrer que $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$
   c) En déduire que 173 divise $a + b$

Partie : II On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante : $(E): \quad x^3 + y^3 = 173(xy+1)$

Soit (x,y) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation (E) ; on pose $x + y = 173k$ tel $k \in \mathbb{N}^*$

1) Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$
2) Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E).

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss2

Partie : I Soit a un élément de $\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors: $a^{2016} \equiv 1[13]$
2) On considère dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^{2015} \equiv 2[13]$ et x l'une de ses solutions
   a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.
   b) Montrer que : $x \equiv 7[13]$
3) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{N}\}$

Partie : II Considérons une urne U contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50 indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un nombre solution de l'équation (E).
2) On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On répète cette

expérience trois fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un nombre solution de l'équation **(E)** ?

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss1

Soit $\mathbf{x}$ un nombre entier relatif tel que $x^{1439} \equiv 1436\,[2015]$.

1) Sachant que $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, Montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.
2) Soit $\mathbf{d}$ un diviseur commun de $\mathbf{x}$ et 2015
   a) Montrer que $\mathbf{d}$ divise 1436.
   b) En déduire que $\mathbf{x}$ et 2015 sont premiers entre eux.
3) a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $x^{1440} \equiv 1\,[5]$ et $x^{1440} \equiv 1\,[13]$ et $x^{1440} \equiv 1\,[31]$.
   (remarquer que $2015 = 5 \times 13 \times 31$)
   b) montrer que $x^{1440} \equiv 1\,[65]$, en déduire que $x^{1440} \equiv 1\,[2015]$
4) Montrer que : $x \equiv 1051\,[2015]$

Exercice .6 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

Soit $\mathbf{n}$ un nombre entier naturel non nul.
On pose : $b_n = 2.10^n + 1$ et $c_n = 2.10^n - 1$.

1) Montrer que $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$, en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
   ($a \wedge b$ représente le plus grand diviseur commun de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$)
2) Déterminer un couple (x_n, y_n) de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $b_n x_n + c_n y_n = 1$

Exercice .7 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss1

Soit $\mathbf{n}$ un nombre entier naturel non nul, on pose : $a_n = \underbrace{33\ldots3}_{\text{n fois le chiffre 3}}1$.

1) Vérifier que a_1 et a_2 sont premiers.
2) Démontrer que pour tout entier naturel $\mathbf{n}$ non nul : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$
3) Démontrer que pour tout entier naturel $\mathbf{k}$: $10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$
4) Démontrer que pour tout entier naturel $\mathbf{k}$: $3a_{30k+1} \equiv 0\,[31]$, en déduire que 31 divise a_{30k+1}
5) Démontrer que pour tout entier naturel $\mathbf{n}$ non nul , si $n \equiv 1\,[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice .8 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

Le but de cet exercice est de chercher s'il existe des entiers naturels $\mathbf{n}$ supérieurs strictement à 1 vérifiant la relation $(\mathfrak{R})$ suivante : $(\mathfrak{R})$: $3^n - 2^n \equiv 0\,[n]$.

1) On suppose que l'entier $\mathbf{n}$ vérifie la relation $(\mathfrak{R})$. Soit $\mathbf{p}$ le plus petit diviseur premier positif du nombre $\mathbf{n}$.
   a) Montrer que $3^n - 2^n \equiv 0\,[p]$, en déduire que $p \geq 5$.
   b) Montrer que $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$.
   c) Montrer qu'il existe un couple (a,b) un couple de $\mathbb{Z}^2$ tel que $an - b(p-1) = 1$ tel $k \in \mathbb{N}^*$
   d) Soient $\mathbf{r}$ et $\mathbf{q}$ le reste et le quotient de la division euclidienne de $\mathbf{a}$ par $(p-1)$.
   (signifie que : $a = q(p-1) + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < p-1$)
   Montrer qu'il existe un entier non nul $\mathbf{k}$ tel que : $rn = 1 + k(p-1)$
2) Déduire de tout ce qui précède, qu'il n'existe aucun entier naturel $\mathbf{n}$ supérieur strictement à 1 vérifiant la relation $(\mathfrak{R})$.

Bon Courge