Exercice .1 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

1) a) Vérifier que : 503 est entier premier.
   b) Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$, en déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): \ 49x - 6y = 1$.

sachant que le couple $(1;8)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) avec la mise évidence des étapes de la résolution.

3) On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2007}$.
   a) Montrer que le couple $(7^{2006}; N)$ est solution de l'équation (E).
   b) En déduire que N est divisible par 2012.
   c) Montrer que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

Exercice .2 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): \ 143x - 195y = 52$.

1) a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 143 et 195, en déduire que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
   b) Sachant que le couple $(-1;-1)$ est une solution particulière de (E), Déterminer la solution générale de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5 , montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}) \ ; \ n^{4k} \equiv 1[5]$.

3) Soient x et y deux nombres entiers non nuls tels que $x \equiv y[4]$.
   a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \ ; \ n^x \equiv n^y \ [5]$
   b) En déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) \ ; \ n^x \equiv n^y \ [10]$

4) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que le couple $(x;y)$ soit solution de l'équation (E).
   Montrer que quel que soit n de $\mathbb{N}^*$: les nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système de numération décimal.

Exercice .3 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Soit x un nombre entier naturel tel que : $10^x \equiv 2[19]$.

1) a) Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$
   b) Montrer que $10^{18} \equiv 1[19]$

2) Soit d un diviseur commun de $(x+1)$ et 18
   a) Montrer que $10^d \equiv 1[19]$.
   b) Montrer que $d = 18$.
   c) En déduire que : $x \equiv 17[18]$

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss1

Soit N le nombre entier dont l'écriture dans le système de numération décimal est : $N = \underbrace{11\cdots11}_{2010 \text{ fois le chiffre } 1}$.

1) Montrer que N est divisible par 11.

2) a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que: $10^{2010} - 1 = 9N$
   b) Démontrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$.
   c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N.

3) Démontrer que le nombre N est divisible par le nombre 22121.

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2010 – Ss1

1) Déterminer les nombres entiers naturels $\mathbf{m}$ tels que : $\mathbf{m^2+1\equiv 0[5]}$.
2) Soit $\mathbf{p}$ un entier naturel premier tel que : $\mathbf{p=3+4k}$ avec $\mathbf{k\in\mathbb{N}}$
et soit $\mathbf{n}$ un entier naturel tel que $\mathbf{n^2+1\equiv 0[p]}$
   a) Vérifier que $\mathbf{(n^2)^{2k+1}\equiv -1[p]}$.
   b) Montrer que $\mathbf{n}$ et $\mathbf{p}$ sont premiers entre eux.
   c) En déduire que $\mathbf{(n^2)^{2k+1}\equiv 1[p]}$
3) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel $\mathbf{n}$ vérifiant la relation $\mathbf{n^2+1\equiv 0[p]}$.

Exercice .6 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2009 – Ss1

Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, on pose : $\mathbf{a_n=2^n+3^n+6^n-1}$.
1) a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, le nombre $\mathbf{a_n}$ est pair.
   b) Déterminer les valeurs de l'entier $\mathbf{n}$ pour lesquelles $\mathbf{a_n\equiv 0[3]}$.
2) Soit $\mathbf{p}$ un entier premier tel que $\mathbf{p>3}$.
   a) Montrer que : $\mathbf{2^{p-1}\equiv 1[p]}$ et $\mathbf{3^{p-1}\equiv 1[p]}$ et $\mathbf{6^{p-1}\equiv 1[p]}$.
   b) Montrer que $\mathbf{p}$ divise $\mathbf{a_{p-2}}$.
   c) Montrer que pour tout entier naturel premier $\mathbf{q}$, il existe un entier naturel non nul $\mathbf{n}$ tel que $\mathbf{a_n\wedge q=q}$.

Exercice .7 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2008 – Ss1

Partie : I On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $\mathbf{(E): 35u-96v=1}$.
1) Montrer que le couple $\mathbf{(11;4)}$ est une solution particulière de $\mathbf{(E)}$.
2) Déterminer l'ensemble solution de l'équation $\mathbf{(E)}$.

Partie : II On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $\mathbf{(F):\ x^{35}\equiv 2[97]}$.
1) Soit $\mathbf{x}$ une solution de l'équation $\mathbf{(F)}$.
   a) Montrer que le nombre $\mathbf{97}$ est premier et que les nombres $\mathbf{x}$ et $\mathbf{97}$ sont premiers entre eux.
   b) Montrer que : $\mathbf{x^{96}\equiv 1[97]}$
   c) Montrer que : $\mathbf{x\equiv 2^{11}[97]}$
2) Montrer que si le nombre entier $\mathbf{x}$ vérifie la condition $\mathbf{x\equiv 2^{11}[97]}$, alors $\mathbf{x}$ est solution de l'équation $\mathbf{(F)}$.
3) Montrer que l'ensemble solution de l'équation $\mathbf{(F)}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels de la forme $\mathbf{11+97k}$ avec $\mathbf{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice .8 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss2

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système $\mathbf{(S)}$ suivant : $\begin{cases}\mathbf{x\equiv a[p]}\\ \mathbf{x\equiv b[q]}\end{cases}$ où $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ des entiers relatifs tels que $\mathbf{p\wedge q=1}$.
1) a) montrer qu'il existe un couple $\mathbf{(u_0\,;v_0)}$ de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant : $\mathbf{u_0p+v_0q=1}$.
   b) Montrer que $\mathbf{x_0=bpu_0+aqv_0}$ est une solution du système $\mathbf{(S)}$.
2) Soit $\mathbf{x}$ une solution du système $\mathbf{(S)}$, montrer que le nombre $\mathbf{pq}$ divise le nombre $\mathbf{x-x_0}$.
3) Soit $\mathbf{x}$ un entier relatif tel que $\mathbf{pq}$ divise le nombre $\mathbf{x-x_0}$, montrer que $\mathbf{x}$ est solution du système $\mathbf{(S)}$.
4) En déduire l'ensemble solution du système $\mathbf{(S)}$.
5) Résoudre dans le système : $\begin{cases}\mathbf{x\equiv 1[8]}\\ \mathbf{x\equiv 3[13]}\end{cases}$

Bon Courge