Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2007 – Ss1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): 195x-232y=1$.

1) a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 232 et 195.

b) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (E) est $S=\{(163+232k\ ;137+195k\ )/k\in\mathbb{Z}\}$.

c) Déterminer l'unique entier naturel d vérifiant les relations : $0\le d\le 232$ et $195d\equiv 1[232]$

2) Montrer que le nombre 233 est premier .

3) Soit A l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et 233. On considère l'application f de A vers A définit par : quel que soit a de A, $f(a)$ est le reste de la division euclidienne du nombre a^{195} par 233.

On admet que $(\forall a\in A-\{0\})\ ;\ a^{232}\equiv 1[232]$

a) Montrer que quels que soient a et b de A, si $f(a)=f(b)$ alors $a=b$

b) En déduire que l'application est une bijection, puis déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2006 – Ss2

Dans $\mathbb{Z}^2$, on considère l'équation (E) suivante : $(E):\ 2(y-1)^2=7x+2$

1) soit (x,y) une solution de (E).

a) Montrer que : $y\equiv 0[\bmod 7]$ ou $y\equiv 2[\bmod 7]$

b) En déduire que l'ensembles solutions de (E) est : $S=\{(14k^2-4k\ ;7k)\ /k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(14k^2+4k\ ;7k+2)\ /k\in\mathbb{Z}\}$

2) Résoudre dans dans $\mathbb{Z}^2$, le système : $\begin{cases} x\wedge y=9 \\ 2(y-1)^2=7x+2 \end{cases}$

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2006 – Ss1

Dans $\mathbb{N}^{*2}$, on considère l'équation (E) suivante : $(E): x^2(x+y)=y^2(x-y)^2$

Soient x et y deux entiers naturels non nuls et δ leur pgcd . On pose : $x=\delta.a$ et $y=\delta.b$

1) On suppose que (x,y) est solution de (E).

On pose : $x\wedge y=d$ et $x=d.a$ et $y=d.b$

a) Vérifier que : $b^2(a-b)^2=(a+b)a^2$

b) En déduire que $b=1$

c) Montrer que $a\neq 1$ et $a-1$ divise $a+1$

d) En déduire que : $a=2$ ou $a=3$

2) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{N}^{*2}$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2005 – Ss2

$x\wedge y$ est le pgcd des nombres x et y . $\overline{abc}^{(x)}$ est l'écriture du nombre abc dans le système de numération de base x .

1) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E):(x+1)^2=9+5y$

a) Soit (x,y) une solution de (E) .Montrer que : $x\equiv 1[\bmod 5]$ ou $x\equiv 2[\bmod 5]$.

b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Montrer que : $(\forall k\in\mathbb{Z})\ ;\ (5k^2+4k-1)\wedge(5k+1)=(k-3)\wedge 8$

3) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système: $\begin{cases} \overline{121}^{(x)}=\overline{59}^{(y)} \\ x\wedge y=8 \\ x\equiv 1[\bmod 5] \end{cases}$

Exercice .5 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2005 – Ss1

A- Soit p un entier naturel premier tel que $p \geq 5$.

1) Montrer que : $p^2 \equiv 1[\bmod 3]$

2) a) En utilisant la parité de p montrer qu'il existe un entier naturel q tel que : $p^2 - 1 = 4q(q+1)$.

b) En déduire que $p^2 \equiv 1[\bmod 8]$

3) Montrer que $p^2 \equiv 1[\bmod 24]$

B- Soit a un entier naturel premier avec le nombre 24.

1) Montrer que : $a^2 \equiv 1[\bmod 24]$.

2) Existe-ils des entiers naturels $a_1, a_2, ..., a_{23}$ tous premiers avec 24 tels que : $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{23}^2 = 23997$

Exercice .6 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2004 – Ss2

1) Résoudre dans $Z \times Z$ l'équation : $(E): 3x - 2y = 1$

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que que $(14n+3\ ,\ 21n+4)$ est solution de l'équation (E).

b) En déduire que les nombres $2n+1$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3) Soi d le pgcd des nombres $2n+1$ et $21n+4$.

a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.

b) Montrer que : $(d = 13) \Leftrightarrow n \equiv 6[\bmod 13]$

4) On pose pour tout entier naturel n : $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

a) Montrer que A et B sont divisibles par l'entier $n-1$.

b) Déterminer $A \wedge B$ suivants les valeurs de n.

Exercice .7 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2004 – Ss1

1) Soit n un entier naturel.

a) Montrer que si n est impair alors: $n^2 \equiv 1[\bmod 8]$

b) Montrer que si n est pair alors: $n^2 \equiv 0[\bmod 8]$ ou $n^2 \equiv 4[\bmod 8]$

2) Soient a et b et c des entiers naturels impairs.

a) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré parfait.

b) Montrer que: $2(ab+bc+ca) \equiv 6[\bmod 8]$

(Remarquer que : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$)

c) En déduire que $2(ab+bc+ca)$ n'est pas un carré parfait.

d) Montrer que $ab+bc+ca$ n'est pas un carré parfait.

Exercice .8 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2003 – Ss1

Dans IN^{*2}, on considère l'équation (E) suivante : $(E): x^2(x^2+7) = y(2x+y)$

Soient x et y deux entiers naturels non nuls et δ leur pgcd. On pose : $x = \delta.a$ et $y = \delta.b$

1) On suppose que (x, y) est solution de (E).

a) Vérifier que : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b)$

b) En déduire qu'il existe $k \in IN$ tel que : $\delta^2 a^2 + 7 = k.b$ et $2a + b = k.a^2$

c) Montrer que $a = 1$

d) En déduire que : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$

2) Résoudre ans l'équation (E) dans IN^{*2}

Bonn Courge