Exercice .1

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2018 – Ss2

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$
2) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.
   b) Montrer que $\dim E=2$
3) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.
4) On définit sur $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $"T"$ par :
   $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2)$; $M(x,y)TM(x',y')=M(x,y)TM(x',y')-M(y,0)TM(y',0)$
   Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :
   $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$; $\varphi(x+iy)=M(x,y)$
   a) Montrer que E est une partie stable de (E,T)
   b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$
   c) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.
5) a) Montrer que la loi $"T"$ est distributive par rapport à la loi $"+"$ dans E .
   b) $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

Exercice .2

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2018 – Ss2

1) Pour tout nombre complexe non nul z différent de i on pose : $h(z)=i\left(\dfrac{z-2i}{z-i}\right)$
   a) Vérifier que : $h(z)=z \iff z^2-2iz-2=0$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^2-2iz-2=0$
2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

On désigne par a et b les solutions de l'équation (E) tels que $\text{Re}(a)=1$

Soit z un nombre complexe différent de i de a et de b et les points $M(z)$, $M'(h(z))$, $A(a)$ et $B(b)$.

   a) Montrer que : $\dfrac{h(z)-a}{h(z)-b}=\dfrac{z-a}{z-b}$. b) En déduire que : $(\widehat{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}})\equiv\pi+(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})\ [2\pi]$
3) a) Montrer que si les points M , A et B sont alignés alors les points M , A et B et M' sont alignés.
   b) Montrer que si les points M , A et B ne sont pas alignés alors les points M , A et B et M' sont Cocycliques.

Exercice .3

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2018 – Ss2

On lance une pièce de monnaie en l'air 10 fois de suite.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat possible, la fréquence d'apparition de « Pile » (c'est-à-dire le nombre de fois d'apparition de « Pile » divisé par 10 »

1) a) Déterminer les valeurs possibles de la variable X.
   b) Calculer la probabilité de l'événement : $\left[X=\dfrac{1}{2}\right]$.
2) Calculer la probabilité de l'événement : X est supérieur ou égal $\dfrac{9}{10}$.

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2018 – Ss2

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=\sqrt{x}(\ln x)^2$ $(x>0)$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité 2 cm.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0. 0,5 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,75 pts

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite au point 0 , puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,75 pts

b) Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$. 0,75 pts

c) Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$, en déduire que : $\forall x\in]0,1]\ ;\ 0\le\sqrt{x}(\ln x)^2\le\left(\dfrac{4}{e}\right)^2$. 1 pts

d) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ 0,5 pts

3) Pour tout $x\ge 0$, on pose : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$

a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$. 0,5 pts

b) Calculer $F'(x)$ pour tout $x\ge 0$. En déduire les variations de F sur $[0,+\infty[$. 1 pts

4) a) En utilisant une intégration par parties, calculer : $I(x)=\int_x^1\sqrt{t}(\ln t)dt$ pour tout $x>0$. 0,75 pts

b) Montrer que pour tout $x>0$: $F(x)=-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2+\dfrac{8}{9}x\sqrt{x}(\ln x)-\dfrac{16}{27}x\sqrt{x}+\dfrac{16}{27}$ 0,75 pts

c) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=1$ et $y=0$. 1 pts

5) Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $U_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$

a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\ge1}$ est bornée et strictement croissante. 1 pts

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\ge1}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$. 0,25 pts

Bon Courage