Exercice .1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique le complexe : $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) On considère le point A d'affixe $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe de B, montrer que $b = d.a$

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C.

a) vérifier que $c = b + a$ en déduire que $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

b) Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice .2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,-2,-2)$, $B(1,-2,-4)$, $C(-3,-1,2)$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et en déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit la sphère (S) dont une équation est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$$

Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1,0,1)$ et pour rayon $R = 5$.

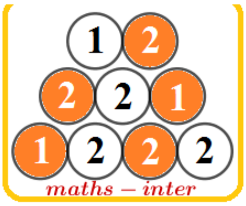
3) **a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4) Montrer que $d(\Omega,(ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4, dont on déterminera le centre.

Exercice .3

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges portant les nombres 2 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1 et quatre boules blanches portant les nombres 2 ; 2 ; 2 ; 1.



On considère l'expérience suivante :
on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

Soient les événements.

A : « les trois boules tirées sont de même couleur »

B : « les trois boules tirées portent le même nombre »

C : « les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre »

1) Montrer que :

$$p(A) = \frac{1}{6}, \quad p(B) = \frac{1}{4} \text{ et } p(C) = \frac{1}{42}.$$

2) On répète l'expérience précédente trois fois avec remise dans l'urne des trois boules tirées après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'événement A.

a) Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X.

b) Montrer que $p(X = 1) = \frac{25}{72}$ et calculer $p(X = 2)$.

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac 2018 – Ss1 .4

Partie I :

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction g

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

1) Vérifier que $g(0) = 0$ 0,25 pts
2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. 0,5 pts

Partie II :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1cm.

1) a) Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} + x$, pour tout x de IR, en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 0,5 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$, en déduire que la droite $(D): y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$. 0,75 pts

c) Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2 - x + xe^x}{e^x}$, pour tout x de IR, en déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. 0,5 pts

d) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) a) Montrer que $f(x) - x$ et $x^2 - x$ sont de même signe pour tout x de IR. 0,25 pts

b) En déduire que (C_f) se trouve au dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0, 1]$. 0,5 pts

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$. pour tout x de IR. 0,75 pts

b) En déduire que f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. 0,5 pts

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f. 0,75 pts

4) a) Montrer que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de IR. 0,25 pts

c) Montrer que (C_f) admet deux points d'inflexion dont d'abscisses respectives 1 et 4. 0,5 pts

5) Tracer sur le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f). (On prend $f(4) \approx 4{,}2$) 1 pts

6) a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur IR, En déduire que $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e - 5}{e}$. 0,5 pts

b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$. 0,75 pts

c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. 0,75 pts

Partie III :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \le u_n \le 1$.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Bonne Chance