Exercice .1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel·

On pose $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-3y\\y&x\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ de dimension 2 .

2) a) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3) On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad;\quad \varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$

b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

c) Montrer que $J^{2017}=\varphi(3^{1008}\sqrt{3})$ puis déterminer l'inverse de J^{2017} dans $(E^*,\times)$.

4) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice .2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Soit M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

1) Déterminer le nombre complexe z tel que les deux points M et M' soient confondus.

2) On suppose que le point M est différent des deux points A et B d'affixes respectifs 1 et -1.

Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

3) Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que : Si le point M appartient à (Δ), alors le point M' appartient à (Δ).

4) Soit (Γ) le cercle dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

Montrer que : Si le point M appartient à (Γ), alors le point M' appartient à (AB).

Exercice .3

Un sac contient $2n$ boules ($n\in\mathbb{N}^*$) indiscernables au toucher.
n Boules blanches et n boules noires
Un jeu consiste à tirer une boule du sac , enregistrer sa couleur et la rendre au sac puis tirer une autre boule et enregistrer sa couleur aussi. La loi du jeu est la suivante :

- Si les deux boules sont blanches, on gagne 20 points.
- Si les deux boules sont noires, on perd 20 points.
- Si les deux boules tirées ne sont pas de même couleur le gain est nul.

1) Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité d'un gain nul.

2) On répète le jeu précédent cinq fois de suite .

a) Calculer la probabilité de gagner 100 points.

b) Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3) On joue une seule fois. On considère la variable aléatoire X dont les valeurs sont : 20 , 0 , -20

a) Déterminer la loi de probabilité deX.

b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2017 – Ss2

Partie :I

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $I=[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\dfrac{\operatorname{Arc\,tan}(x)}{x}$; $(x>0)$

1) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle I. 0,5 pts

2) a) Soit x un élément de l'intervalle I, montrer que : $(\forall x\in[0,1])$; $\dfrac{1}{1+x^2}\leq\dfrac{1}{1+t^2}\leq 1$ 0,5 pts

   b) Montrer que : $(\forall x\in[0,+\infty[)$; $\dfrac{x}{1+x^2}\leq \arctan(x)\leq x$ 0,5 pts

   c) Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0. 0,75 pts

3) a) Sachant que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$. 0,5 pts

   b) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I. 0,25 pts

Partie :II

1) Soit la fonction g définie sur $I=[0,+\infty[$ par : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $g(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ et $g(0)=1$

   a) Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $f(x)\leq g(x)\leq 1$. 0,5 pts

   b) En déduire que g est dérivable à droite en 0. 0,75 pts

2) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $g'(x)=\dfrac{1}{x}(f(x)-g(x))$. 0,75 pts

3) Montrer que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

   a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)dt=0$ (On rappelle que $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $0<\arctan x<\dfrac{\pi}{2}$) 0,75 pts

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 0,5 pts

Partie :III

1) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique α sur $]0,1[$. 0,75 pts

2) a) Vérifier que : $(\forall x\in[0,+\infty[)$; $0\leq 1-f(x)\leq\dfrac{x^2}{1+x^2}$ (Voir la question I) 2) b)) 0,5 pts

   b) Montrer que: $(\forall x\in[0,+\infty[)$; $|g'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$ 0,75 pts

3) Soit la suite $(U_n)_{n\geq0}$ définie par: $U_0\in IR^+$ et $(\forall n\in IN)$; $U_{n+1}=g(U_n)$

   a) Montrer que : $(\forall n\in IN)$; $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$. 0,75 pts

   b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq0}$ est convergente. 0,75 pts

Bon Courage