Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2017 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

On considère l'ensemble $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$.
2) On définit sur $M_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne "T" par :
   $(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)(\forall(c,d)\in\mathbb{R}^2)\quad;\quad M(a,b)TM(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$
   Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),T)$
3) On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :
   $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\quad;\quad \varphi(x+iy)=M(x,y)$ et On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$
   a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T) et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.
   b) En déduire que (E^*,T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J.
4) a) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi "$+$" dans E.
   b) En déduire que $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2017 – Ss1

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E):\ 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta=(2im)^2$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m).

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

On suppose que $m\in\mathbb{C}-\{0,1,i\}$ et on pose : $z_1=\frac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2=\frac{1-i}{2}(m+i)$

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs 1, i, m, z_1 et z_2.

1) a) Vérifier que : $z_1=iz_2+1$
   b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega=\frac{1+i}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2) Vérifier que : $\frac{z_2-m}{z_1-m}=i\frac{m-1}{m-i}$
3) Montrer que si les points M et M_1 et M_2 sont alignés , alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω, M, M_1 et M_2 sont cocycliques.

   (remarquer que : $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2017 – Ss1

On admet que le nombre $\mathbf{2017}$ est premier et que $\mathbf{2016=2^5 3^2 7}$
Soit $\mathbf{p}$ un nombre premier supérieur ou égal à $\mathbf{5}$.

1) Soit le couple $(\mathbf{x,y})$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbf{px+y^{p-1}=2017}$
   a) Vérifier que : $\mathbf{p<2017}$.
   b) Montrer que : $\mathbf{p}$ ne divise pas $\mathbf{y}$.
   c) Montrer que : $\mathbf{y^{p-1}\equiv 1[p]}$ puis en déduire que $\mathbf{p}$ divise $\mathbf{2016}$.
   d) Montrer que : $\mathbf{p=7}$
2) Déterminer, suivant les valeurs de $\mathbf{p}$, les couple $(\mathbf{x,y})$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\mathbf{px+y^{p-1}=2017}$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2017 – Ss1

Partie :I

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $\mathbf{I=[0,+\infty[}$ par: $\mathbf{f(0)=0}$ et $\mathbf{f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}$; $\mathbf{(x>0)}$

$(\mathbf{C_f})$ est la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $\left(\mathbf{O;\vec{i};\vec{j}}\right)$ unité 2 cm.

1) a) Montrer que la fonction $\mathbf{f}$ est continue à droite au point 0. 0,25 pts
   b) Montrer que la fonction $\mathbf{f}$ est dérivable à droite au point 0. 0,5 pts
   c) Montrer que $\mathbf{f}$ est dérivable sur $\mathbf{]0,+\infty[}$, puis calculer $\mathbf{f'(x)}$ pour tout $\mathbf{x\in]0,+\infty[}$. 0,5 pts

2) a) Calculer $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$, puis interpréter analytiquement le résultat obtenu. 0,5 pts
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathbf{f}$. 0,25 pts

3) a) Montrer que la courbe $(\mathbf{C_f})$ admet un point d'inflexion $\mathbf{A}$ qu'on déterminera. 0,75 pts
   b) Tracer la courbe $(\mathbf{C_f})$ (On prendra $\mathbf{f(1)\approx 0{,}7}$ et $\mathbf{4e^{-3}\approx 0{,}2}$) 0,5 pts

Partie :II

Soit la fonction $\mathbf{F}$ définie sur $\mathbf{[0,+\infty[}$ par : $\mathbf{F(x)=\int_x^1 f(t)dt}$.

1) Montrer que $\mathbf{F}$ est continue sur $\mathbf{[0,+\infty[}$. 0,25 pts

2) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\mathbf{(\forall x\in]0,+\infty[)\quad ;\quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt=e^{-1}-xe^{-\frac{1}{x}}-\int_x^1\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt}$$ 0,5 pts

   b) Déterminer : $\mathbf{\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt}$ pour tout x de $\mathbf{]0,+\infty[}$ 0,25 pts

   c) Montrer que : $\mathbf{\int_0^1 f(x)dx=e^{-1}}$ 0,5 pts

3) Calculer en $\mathbf{cm^2}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathbf{C_f})$ et les droites d'équations respectives, $\mathbf{x=0}$, $\mathbf{x=2}$ et $\mathbf{y=0}$. 0,5 pts

4) Soit la suite $\mathbf{(u_n)_{n\geq 0}}$ définie par: $(\forall \mathbf{n}\in\mathbb{N})$; $\mathbf{u_n=F(n)-F(n+2)}$
   a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n il existe un

nombre réel $\mathbf{v_n}$ appartenant à l'intervalle $\left]n, n+2\right[$ tel que: $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$. 0,5 pts

b) Montrer que : $\left(\forall n \in IN^*\right)$; $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$ 0,25 pts

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$ 0,25 pts

Partie :III

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, il existe un réel $a_n \in IR^*$ tel que : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$ 0,5 pts

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante. 0,25 pts

c) Vérifier que : $\left(\forall n \in IN^*\right)$; $-\frac{1}{a_n} + \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$ 0,25 pts

2) a) Montrer que : $\left(\forall t \in [0,+\infty[\right)$; $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$ 0,25 pts

b) Montrer que : $\left(\forall x \in [0,+\infty[\right)$; $-\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ 0,5 pts

3) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$

a) Vérifier que : $a_4 \geq 1$, en déduire que : $a_n \geq 1$ (On admet que $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$). 0,5 pts

b) Montrer que : $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$ (Voir questions 3) a) et 3)b) de III). 0,5 pts

c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ (Voir questions 1) c) et 2)b) de III)). 0,5 pts

En déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$

d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

Bon Courage