Exercice .1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout nombre complexe $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose : $M(z)=\begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E=\{M(z)/z\in\mathbb{C}\}$

1) On définit sur E la loi de composition interne "$*$" par :
$(\forall z\in\mathbb{C})(\forall z'\in\mathbb{C})\ ;\ M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$
Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

2) On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :
$(\forall z\in\mathbb{C})\ ;\ \varphi(z)=M(z)$ et On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$
   a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$ et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.
   b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif .

3) En déduire que $(E,*,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice .2

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E):\ z^2-(1+\sqrt{3})(1+i)z+4i=0$$

1) a) Vérifier que $D=\left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$ est le discriminant de l'équation (E)
   b) Ecrire sous forme exponentielle chacune des solutions de l'équation (E)

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
On considère les points A et B d'affixes respectifs $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{3}+i$.
   a) Montrer que l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que $z=\frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite passant par B.
   b) Soient M et M' deux points d'affixes respectifs z et z' tels que $z'=a\bar{z}-b$ et .
   Montrer que : $\dfrac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\dfrac{2}{|z-b|^2}$
   c) En déduire que la droite (D) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}})$

Exercice .3

Une urne U contient 8 boules indiscernables au toucher :
4 Boules rouges et 4 boules bleues
Une urne V contient 6 boules indiscernables au toucher :
2 Boules rouges et 4 boules bleues
On considère l'expérience suivante :
On tire au hasard une boule de l'urne U : Si elle est rouge, on la met dans l'urne V, puis on tire une boule de l'urne V, Si elle est bleue, on la met à côté, puis on tire une boule de l'urne V.
On considère les deux événements :

R_U : « la boule tirée de l'urne U est rouge »
B_U : « la boule tirée de l'urne U est bleue »
R_V : « la boule tirée de l'urne V est rouge »
B_V : « la boule tirée de l'urne V est bleue »

1) Calculer la probabilité de chacun des événement : R_U et B_U.

2) a) Calculer la probabilité de l'événement $\mathbf{B_V}$ sachant que et l'événement $\mathbf{R_U}$ est réalisé.

b) Calculer la probabilité de l'événement $\mathbf{B_V}$ sachant que et l'événement $\mathbf{B_U}$ est réalisé.

c) Montrer que $\mathbf{p(B_V) = \dfrac{13}{21}}$. d) En déduire la probabilité de l'événement $\mathbf{R_V}$.

Exercice .4 — Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss2

$\mathbf{n}$ est un entier naturel non nul.

On considère la fonction $\mathbf{f_n}$ définie sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ par: $\mathbf{f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{n}{x}}$

$(\mathbf{C_n})$ est la courbe représentative de $\mathbf{f_n}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Etudier les deux branches infinies de la courbe $(\mathbf{C_n})$. 0,75 pts

b) Etudier les variations de la fonction $\mathbf{f_n}$ sur $\left]0,+\infty\right[$ puis dresser son tableau de variations. 0,75 pts

c) Construire la courbe $(\mathbf{C_2})$. 0,5 pts

2) Montrer que la fonction $\mathbf{f_n}$ est une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ vers $\mathbf{IR}$. 0,5 pts

3) a) Montrer que pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$ il existe un réel unique $\alpha_n \in \left]0,+\infty\right[$ tel que : $\mathbf{f_n(\alpha_n) = 0}$ 0,5 pts

b) Comparer $\mathbf{f_n(x)}$ et $\mathbf{f_{n+1}(x)}$ pour tout $\mathbf{x}$ de $\left]0,+\infty\right[$ 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante . 0,5 pts

4) a) Montrer que : $(\forall x > 0)$; $\ln(x) \leq x$ 0,5 pts b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ 0,5 pts

5) Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$ on pose : $\mathbf{I_n = \dfrac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \displaystyle\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(t)\,dt}$

a) Montrer que : $(\forall n \in IN^*)\ (\exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}])$; $\mathbf{I_n = f_n(c_n)}$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in IN^*)$; $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$ 0,5 pts

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice .5 — Bac National Sc maths - 2016 - Session : 2 — 3,5 points

$\mathbf{n}$ est un entier naturel tel que $\mathbf{n \geq 2}$.

On considère la fonction $\mathbf{g_n}$ définie sur l'intervalle $\left[n,+\infty\right[$ par: $\mathbf{g_n(x) = \displaystyle\int_n^x \dfrac{1}{\ln t}\,dt}$

1) a) Montrer que la fonction $\mathbf{g_n}$ est dérivable sur $\left[n,+\infty\right[$ puis déterminer sa fonction dérivée $\mathbf{g_n'}$ 0,5 pts

b) Montrer que la fonction $\mathbf{g_n}$ est strictement croissante sur $\left[n,+\infty\right[$. 0,25 pts

2) a) Montrer que $(\forall x \geq n)$; $\mathbf{g_n(x) \geq \ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)}$. 0,5 pts (On admet que: $(\forall t \geq 0)$; $\ln(1+t) \leq t$)

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ 0,25 pts

3) a) Montrer que $\mathbf{g_n}$ est une bijection de $\left[n,+\infty\right[$ vers $\left[0,+\infty\right[$. 0,25 pts

b) En déduire que : $(\forall n \geq 2)\ (\exists! u_n \geq n)$; $\displaystyle\int_n^{u_n} \dfrac{1}{\ln t}\,dt = 1$. 0,5 pts

4) On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3) b) .

a) Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $\displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} \dfrac{1}{\ln t}\,dt = \int_n^{n+1} \dfrac{1}{\ln t}\,dt$. 0,5 pts

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante. 0,5 pts c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ 0,25 pts

Bon Courage