Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_3(IR),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_3(IR),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On pose $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ et pour tout couple $(x,y)\in IR^2$.

On considère l'ensemble $E=\{M(x,y)/(x,y)\in IR^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(IR),+)$.
2) Vérifier que :
$\left(\forall(x,y)\in IR^2\right)\left(\forall(x',y')\in IR^2\right)$; $M(x,y)TM(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$
3) On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :
$\left(\forall(x,y)\in IR^2\right)$; $\varphi(x+iy)=M(x,y)$ et On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$
   a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.
   b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J.
4) Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.
5) a) Calculer $A\times M(x,y)$ pour tout $M(x,y)$ de E.
   b) En déduire que tout élément de E n'admet pas de symétrique dans $(M_3(IR),\times)$.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss1

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soient les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan tels que les points O, M_1 et M_2 sont non alignés et deux à deux distincts et $M(z)$ le point d'affixe z vérifiant la relation : $z=\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

1) a) Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\times\dfrac{z_2}{z_1}=-1$
   b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2.
2) Montrer que si $z_2=\overline{z_1}$, alors le point M appartient à l'axe des réels.
3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation R de centre O et d'angle $\alpha\in]0,\pi[$.
   a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α.
   b) En déduire que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.
4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0,\pi[$.
On suppose que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation : $t\in\mathbb{C}$; $6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$.
   a) Sans calculer z_1 et z_2, vérifier que : $z=2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$
   b) Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe z en fonction de θ.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss1

Partie : I Soit le couple (a,b) de $IN^*\times IN^*$ tel que le nombre premier 173 divise: a^3+b^3

1) Montrer que : $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$ (remarquer que : $171=3\times57$)
2) Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b
3) On suppose que 173 divise a, montrer que 173 divise $a+b$
4) On suppose que 173 ne divise pas a

a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $a^{171} \equiv b^{171} [173]$

b) Montrer que $a^{171}(a+b) \equiv 0 [173]$

c) En déduire que 173 divise $a+b$

Partie : II On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante : $(E): \quad x^3 + y^3 = 173(xy+1)$

Soit (x,y) un couple de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'équation (E) ; on pose $x + y = 173k$ tel $k \in \mathbb{N}^*$

1) Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$

2) Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E).

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2016 – Ss1

Partie :I

1) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que pour tout réel x strictement positif , il existe un réel θ compris 0 et x tel que : $e^{\theta} = \dfrac{x}{1-e^{-x}}$.

2) En déduire que :

a) $(\forall x > 0)$; $1 - x < e^{-x}$ b) $(\forall x > 0)$; $x + 1 < e^{x}$ c) $(\forall x > 0)$; $0 < \dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1} < x$

Partie :II

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{xe^{x}}{e^{x}-1}$; $(x > 0)$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0. 0,5 pts

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$, pus interpréter graphiquement le résultat obtenu. 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x \geq 0)$; $x - \dfrac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$ 0,25 pts (voir I) 2) a))

b) En déduire que : $(\forall x \geq 0)$; $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \dfrac{x^2}{2}$ 0,5 pts

3) a) Vérifier que : $(\forall x > 0)$; $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{-x}+x-1}{x^2} f(x)$ 0,5 pts

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{1}{2}$ 0,75 pts

4) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $(\forall x > 0)$; $f'(x) = \dfrac{e^{x}(e^{x}-1-x)}{(e^{x}-1)^2}$ 0,75 pts

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ 0,5 pts (voir I) 2) b))

Partie :II

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0 > 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = \ln(f(U_n))$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n > 0$. 0,5 pts

2) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante. En déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts

3) Montrer que 0 est la seule solution de l'équation $\ln(f(x)) = x$ en déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ 0,5 pts

Exercice .5

Soit la fonction $\mathbf{F}$ définie sur $\mathbf{I} =]0, +\infty[$ par : $\mathbf{F(x)} = \int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$.

1) a) Etudier le signe de $\mathbf{F(x)}$, pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbf{I}$. 0,5 pts

b) Montrer que $\mathbf{F}$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbf{I}$ et déterminer $\mathbf{F'(x)}$, pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbf{I}$. 0,5 pts

c) Montrer que $\mathbf{F}$ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbf{I}$. 0,25 pts

2) a) En utilisant la nouvelle variable $\mathbf{u} = \sqrt{e^t - 1}$, montrer que pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbf{I}$:

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2\arctan\sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

b) Calculer : $\lim_{x \to 0^+} \mathbf{F(x)}$ et $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{F(x)}$, pour tout $\mathbf{x}$ de $\mathbf{I}$. 0,5 pts

3) a) Montrer que la fonction $\mathbf{F}$ est une bijection de l'intervalle $\mathbf{I}$ vers un intervalle qu'on déterminera. 0,25 pts

b) Déterminer la bijection réciproque $\mathbf{F}^{-1}$ de la bijection $\mathbf{F}$

Bon Courage