

1) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 - 8z + 32 = 0$

b) Soit le nombre complexe  $a$  tel que  $a = 4 + 4i$ .

Ecrire le nombre  $a$  sous forme trigonométrique en déduire que  $a^{12}$  est un nombre réel négatif.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on

considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes  $a$ ,  $b$  et  $c$  telles que :

$$a = 4 + 4i \quad \text{et} \quad b = 2 + 3i \quad \text{et} \quad c = 3 + 4i$$

Soit  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan et  $z'$  l'affixe

d'un point  $M'$  image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

a) Montrer que  $z' = iz + 7 + i$ .

b) Vérifier que l'affixe  $d$  du point  $D$  image du point  $A$  par la rotation  $R$  est  $3 + 5i$ .

c) Montrer que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$  est la droite  $(BC)$ .

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le plan  $(P): 2x - z - 2 = 0$  et la sphère  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$

1) montrer que le centre de la sphère  $(S)$  est le point  $\Omega(-1; 0; 1)$  et que son centre est  $3$ .

2) a) Calculer la distance  $d(\Omega, (P))$

b) en déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$ .

3) Montrer que le rayon du cercle  $(\Gamma)$  est égal à  $2$  et déterminer les coordonnées de son centre  $H$ .

Un sac contient 5 jetons indiscernables au toucher.

2 jetons blancs, 2 jetons verts et un seul jeton rouge (voir figure ci-contre)

On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac.

1) Soit l'événement :  $A$  : « les trois jetons tirés sont de même couleur »

$$\text{Montrer que : } p(A) = \frac{17}{125}.$$

2) Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de jetons blancs tirés.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .



**Partie I :** On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = 1 - x + x \ln x$

- 1) a) Montrer que  $g'(x) = \ln x$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  0,5 pts  
b) Etudier les variations de la fonction  $g$  et dresser son tableau de variations. 0,5 pts
- 2) Calculer  $g(1)$ , en déduire le signe de  $g(x)$  dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ . 0,75 pts

**Partie II :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$ .

$(C_f)$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité 1cm.

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter le résultat géométriquement. 0,75 pts
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  en déduire la nature de la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$ . 0,75 pts
- 3) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ . 0,75 pts  
b) Calculer  $f'(1)$  et interpréter le résultat obtenu géométriquement. 0,25 pts  
c) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variations sur  $]0, +\infty[$ . 0,5 pts
- 4) Construire la courbe  $(C_f)$  sur le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . 0,75 pts  
(On admet que  $(C_f)$  admet deux points d'inflexion sachant que l'abscisse de l'un est égal à 1 et l'abscisse de l'autre est compris entre 2 et 2,5 et on prend  $f(0,3) \approx 0$ )
- 5) a) Montrer que  $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 1$ . 0,5 pts  
b) Calculer, en  $cm^2$ , l'aire du domaine limité par la courbe  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ . 0,75 pts
- 6) Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2 \ln(x^2)}{|x|}$   
a) Montrer que la fonction  $h$  est paire et que  $h(x) = f(x)$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  0,75 pts  
b) Construire sur le même repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , la courbe  $(C_h)$  représentative de la fonction  $h$ . 0,5 pts

Bonne Chance