Exercice .1

Partie : I l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une loi de composition interne "$*$" définie par :

$$(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2) \quad ; \quad x*y = x+y-e^{xy}+1$$

1) a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

2) Sachant que l'équation : $(E):\ 3+x-e^{2x}=0$ admet deux solutions distincts dans $\mathbb{R}$,

Montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie : II On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel·

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

2) Montrer que F est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3) Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers F définie par :

$(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2) \quad ; \quad \varphi(x+iy)=M(x,y)$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(F,\times)$

b) On pose $F^*=F-\{0\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

c) En déduire que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif.

4) Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice .2

On considère dans complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-(1+i)z+2+2i=0$

1) a) Vérifier que $\Delta=(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)

b) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 l'imaginaire pur)

c) Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectifs z_1 et z_2.

a) Déterminer le nombre complexe e l'affixe du point E, milieu du segment $[AB]$.

b) Soit R la rotation de centre A d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, on pose $R(E)=C$. Montrer que : $z_C=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

c) Soit D le point d'affixe $d=1+\dfrac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\left(\dfrac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\dfrac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ est réel, puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Exercice .3

Partie : I Soit a un élément de $\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors: $a^{2016}\equiv 1\,[13]$

2) On considère dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^{2015}\equiv 2\,[13]$ et x l'une de ses solutions

a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x\equiv 7\,[13]$

3) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (E) est : $S=\{7+13k\,/\,k\in\mathbb{N}\}$

Partie : II Considérons une urne $\mathbf{U}$ contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50 indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un nombre solution de l'équation $(\mathbf{E})$.

2) On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience trois fois de suite.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un nombre solution de l'équation $(\mathbf{E})$?

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss2

$\mathbf{n}$ est un entier naturel non nul.

On considère la fonction $\mathbf{f_n}$ définie sur l'intervalle $\mathbf{IR}$ par: $\mathbf{f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}}$

$(\mathbf{C_n})$ est la courbe représentative de $\mathbf{f_n}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)$ puis interpréter graphiquement les deux résultats obtenus. 0,75 pts

b) Montrer que la fonction $\mathbf{f_n}$ est dérivable sur $\mathbf{IR}$ puis calculer $\mathbf{f_n'(x)}$ pour tout x de $\mathbf{IR}$.

b) Montrer que la fonction $\mathbf{f_n}$ est strictement croissante sur $\mathbf{IR}$. 0,25 pts

2) a) Montrer que le point $\mathbf{I_n\left(n,\dfrac{1}{2}\right)}$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathbf{C_n})$. 0,5 pts

b) Construire la courbe $(\mathbf{C_n})$. 0,5 pts

c) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathbf{C_1})$ et les droites d'équations respectives : $\mathbf{x=0}$, $\mathbf{x=1}$ et $\mathbf{y=0}$. 0,75 pts

3) a) Montrer que pour tout $\mathbf{n\in IN^*}$, l'équation $\mathbf{f_n(x)=x}$ admet une solution unique $\mathbf{u_n\in\,]0,n[}$. 0,75 pts

b) Montrer que : $(\forall n\in IN^*)(\forall x\in IR)$; $\mathbf{f_n(x)<f_{n+1}(x)}$ 0,5 pts

c) Montrer que la suite $(\mathbf{u_n})_{n\geq1}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente. 0,75 pts

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ 0,5 pts

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss2

On considère la fonction $\mathbf{g}$ définie sur $\mathbf{IR^*}$ par : $\mathbf{g(x)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt}$ et $\mathbf{g(0)=1}$

1) Montrer que la fonction $\mathbf{g}$ est paire. 0,5 pts

2) Montrer que la fonction $\mathbf{g}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $\mathbf{g'(x)}$ pour $\mathbf{x>0}$ 0,75 pts

3) a) En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $\mathbf{x>0}$:

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$$ 0,5 pts

b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $|g(x)|\leq\dfrac{2}{x}$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. 0,75 pts

4) a) Vérifier que : $(\forall t>0)$; $\mathbf{1-\cos t\leq t}$; en déduire que : $(\forall x>0)$; $\mathbf{0\leq\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt\leq 2x}$ 0,5 pts

b) Vérifier que $(\forall x>0)$; $\mathbf{g(x)-\ln 3=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt}$ 0,5 pts

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ 0,5 pts

Bon Courage