Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel·

pour tout $x\in\mathbb{R}$ on pose : $M(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+2x\end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble $E=\{M(x)/x\in\mathbb{R}\}$

E est muni de la loi de composition interne $"T"$ définie par :

$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\ ;\quad M(x)TM(y)=M(x+y+1)$

1) On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ vers E définie par :
$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\quad \varphi(x)=M(x-1)$ et On pose $E^*=E-\{M(0,0)\}$
   a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T).
   b) En déduire que (E,T) est un groupe commutatif .
2) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\ ;\quad M(x)\times M(y)=M(x+y+xy)$
   b) En déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi $"\times"$ est commutative dans E.
   c) Montrer que la loi $"\times"$ est distributive par rapport à la loi $"T"$ dans E.
   d) Montrer que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E,T) et que la matrice identique I est neutre dans $(E,\times)$.
3) a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{1\})\ ;\quad M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=I$
   b) Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$

1) a) Vérifier que $\Delta=(3-i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E)
   b) Déterminer a et b les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (sachant que $b\in\mathbb{R}$)
   c) Vérifier que $b=(1-i\sqrt{3})a$.
2) le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectifs a et b .
   a) Déterminer le nombre complexe b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation R

de centre A d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.
   c) Soit C un point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de et de O et de A. Déterminer l'argument du nombre complexe $\dfrac{c}{c-a}$.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss1

Soit x un nombre entier relatif tel que $x^{1439}\equiv 1436\,[2015]$.

1) Sachant que $1436\times1051-2015\times749=1$, Montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.
2) Soit d un diviseur commun de x et 2015
   a) Montrer que d divise 1436.
   b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.
3) a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $x^{1440}\equiv1\,[5]$ et $x^{1440}\equiv1\,[13]$ et $x^{1440}\equiv1\,[31]$.

(remarquer que $2015 = 5\times13\times31$)

b) montrer que $x^{1440} \equiv 1[65]$, en déduire que $x^{1440} \equiv 1[2015]$

4) Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss1

Partie :I

Soit la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=x(1+\ln^2 x)$ pour $(x>0)$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu . 0,5 pts

2) a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0. 0,25 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu . 0,5 pts .

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

3) a) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1} . 0,25 pts

b) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite d'équation $y=x$. 0,25 pts

c) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prendra $e^{-1}\approx 0{,}4$) 0,5 pts

Partie :II

Soit la suite $(U_n)_{n\geq1}$ définie par: $U_0=e^{-1}$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=f(U_n)$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $e^{-1}\leq U_n<1$. 0,5 pts

2) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq1}$ est strictement croissante , en déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts

3) On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

a) Montrer que $e^{-1}\leq L\leq 1$

b) Déterminer la valeur de L

Partie :III

Soit la fonction numérique F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

1) a) Montrer que la fonction $H: x \mapsto -\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x^2\ln x$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto x\ln x$ sur $]0,+\infty[$. 0,25 pts

b) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\int_1^x t\ln^2(t)dt = \dfrac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\ln(t)dt$. 0,5 pts

c) En déduire que pour tout $x>0$: $F(x) = -\dfrac{3}{4}+\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}\ln(x)+\dfrac{x^2}{2}\ln^2(x)$ 0,5 pts

2) a) Montrer que la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ en déduire $\int_0^1 f(x)dx$

Exercice .5 | Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2015 – Ss1

On considère la fonction $\mathbf{g}$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ et $g(0)=\ln 2$

1) a) Montrer que : $(\forall x>0)(\forall t\in[x,2x])$; $e^{-2x}\le e^{-t}<e^{-x}$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x>0)$; $e^{-2x}\ln 2\le g(x)<e^{-x}\ln 2$ 0,5 pts

c) En déduire que g est continue à droite au point 0. 0,25 pts

2) Montrer que la fonction $\mathbf{g}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$ 0,75 pts

3) a) En utilisant le théorème des AF, démontrer que : $(\forall t>0)$; $-1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x>0)$; $-1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$ 0,5 pts

c) En déduire que g est dérivable à droite au point 0. 0,5 pts

Bon Courage