Exercice .1

Partie I : Soit a le nombre complexe tel que $a = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1) Montrer que le module du nombre complexe a est $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2) Vérifier que $a = 2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)+2i\sin\frac{\pi}{4}$.

3) a) En linéarisant $\cos^2\theta$, où est θ un réel, montrer que $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

b) Montrer que $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8}+4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$.

c) Montrer que $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ est l'écriture trigonométrique de a, puis démontrer que : $a^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 i$

Partie II : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A et Ω d'affixes respectives a et ω telles que : $a = 2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $\omega = \sqrt{2}$ et R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Vérifier que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $2i$.

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-2i| = 2$.

Exercice .2

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(2,1,0)$ et $B(-4,1,0)$.

1) Soit (P) le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{U} = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.
Montrer que $x+y-z-3=0$ est une équation cartésienne de (P).

2) Soit (S) l'ensemble de points M vérifiant la relation : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1;1;0)$ et de rayon 3.

3) a) Calculer la distance du point Ω au plan (P), en déduire que (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

b) Démontrer que le centre du cercle (C) est $H(0;2;-1)$.

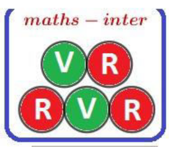
4) Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB} = \vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$
En déduire l'aire du triangle OHB.

Exercice .3

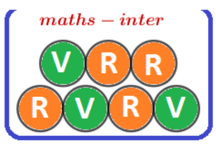
Une urne U_1 contient 7 boules indiscernables au toucher : 4 Boules rouges et 3 boules vertes
Une urne U_2 contient 5 boules indiscernables au toucher : 3 Boules rouges et 2 boules vertes

1) On considère l'expérience suivante :
On tire simultanément trois boules de l'urne U_1
On considère les deux événements :
A : « Obtenir une boule rouge et deux boules vertes »
B : « les trois boules tirées sont de même couleur »
Montrer que : $p(A) = \frac{12}{35}$ et $p(B) = \frac{1}{7}$.

2) On considère l'expérience suivante :
On tire simultanément deux boules de l'urne U_1, puis on tire une seule boule de l'urne U_2
Soit C l'événement :
« les trois boules tirées sont rouges »
Montrer que : $p(C) = \frac{6}{35}$



Urne U_2



Urne U_1

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac 2015 – Ss1 – Version A .4

On considère la fonction f à variable réelle définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ d'unité $2cm$.

Partie I :

1) Soit D_f le domaine de définition de la fonction f. Montrer que $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$. 0,5 pts

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique des résultats. 0,75 pts

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et étudier la nature de la branche infinie au voisinage de $+\infty$ 0,5 pts

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et donner une interprétation géométrique du résultat. 0,5 pts

3) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ pour tout x de D_f. 0,75 pts

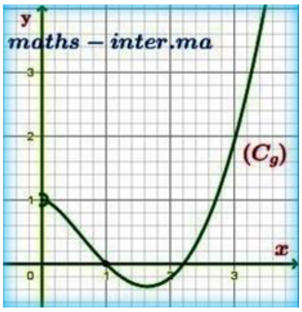
b) Etudier les variations de la fonction f sur D_f. 1 pts

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f. 0,25 pts

Partie II : On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

(C_g) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé(voir figure).



1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$(E): x\in]0,+\infty[\;;\; g(x)=0$ 0,5 pts

b) On donne le tableau de valeurs :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	−0,14	−0,02	0,12	0,28

Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que $2{,}2<\alpha<2{,}3$ 0,5 pts

2) a) Montrer que $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f. 0,25 pts

b) Montrer que la droite $(\Delta): y=x$ coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses 1 et α. 0,5 pts

c) A partir de la courbe (C_g), Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1,\alpha]$ et montrer que $f(x)-x\le 0$ pour tout x de $[1,\alpha]$. 0,5 pts

3) Construire sur le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, la droite (Δ) et la courbe (C_f). 1,25 pts

4) a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$.

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$. 0,5 pts

Partie III :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $1\le u_n\le\alpha$. 0,5 pts

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. 0,75 pts

En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite. 0,75 pts

Bonne Chance