Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

On pose $J = \left]-1,1\right[$

Partie : I Soient a et b deux éléments de l'intervalle J, on pose : $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

1) Vérifier que $\left(\forall (a,b) \in J^2\right)$; $1+ab>0$, en déduire que $*$ est une loi de composition interne dans J.
2) a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans J.
   b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans J qu'on déterminera.
   c) Montrer que $(J, *)$ est un groupe commutatif.

Partie : II On considère l'application f définie sur IR par : $f(x) == \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1) Montrer que la fonction f est une bijection de IR vers J
2) Soit g la bijection réciproque de l'application f (la détermination de g n'est pas demandé)
   Quel que soient x et y de J, on pose : $x \perp y = f\left(g(x)\times g(y)\right)$
   Montrer que f est un homomorphisme de $(IR^*,\times)$ vers $(J^*,\perp)$ tel que $J^* = J - \{0\}$.
3) On rappelle que $(IR^*,\times)$ est un groupe commutatif et on admet que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans J.
   Montrer que $(J,*,\perp)$ est un corps commutatif.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

Partie I :

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2+i=0$ (a est la solution de l'équation telle que $\mathrm{Re}(a)>0$)
2) a) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $1+a$
   b) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
   c) Vérifier que $(1+a)(1-a)=1+i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $1-a$.

Partie II :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectifs a, $-a$, z et z' tels que $zz'+i=0$.

1) Soit N le point d'affixe $\bar{z}$, conjugué de z. Montrer que les droites (ON) et (OM') sont perpendiculaires.
2) a) Montrer que : $z'-a = i\dfrac{z-a}{az}$. b) Montrer que si $z \neq -a$, alors : $z' \neq -a$ et $\dfrac{z'-a}{z'+a} = -\dfrac{z-a}{z+a}$.
3) On suppose que les points A, B, M sont non alignés.
Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

Soit n un nombre entier naturel non nul.
On pose : $b_n = 2.10^n+1$ et $c_n = 2.10^n-1$.

1) Montrer que $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$, en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.
   ($a \wedge b$ représente le plus grand diviseur commun de a et b)
2) Déterminer un couple (x_n, y_n) de Z^2 vérifiant : $b_n x_n + c_n y_n = 1$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

Une urne W contient 3 boules indiscernables au toucher :
1 Boule noire et 2 boules blanches.
chacune des urnes U et V contient 4 boules indiscernables au toucher :
2 Boule noires et 2 boules blanches.

On considère l'expérience suivante :
On tire au hasard une boule de l'urne $\mathbf{W}$: Si elle est blanche, on la met dans l'urne $\mathbf{U}$, puis on tire deux boules simultanément de l'urne $\mathbf{U}$, Si elle est noire, on la met dans l'urne $\mathbf{V}$, puis on tire deux boules

1) Quelle est la probabilité pour que le tirage des deux boules soit de l'urne U ?
2) Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience?
3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches à la fin de l'expérience.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

Partie :I

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ par: $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\dfrac{-\ln \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}}}$

(C_f) est la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ unité 1 cm.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus. 1pts
2) Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de la fonction $\mathbf{f}$ sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$. 0,75 pts
3) Pour tout $n\in IN^*$, on considère la fonction g_n définie sur $\left]0,1\right[$ par: $g_n(x)=f(x)-x^n$
   a) Montrer que g_n est strictement décroissante sur $\left]0,1\right[$. 0,25 pts
   b) En déduire que pour tout entier $n\geq 1$ il existe $\alpha_n\in\left]0,1\right[$ unique, tel que : $f_n(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$ 0,5 pts .
   c) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$: $g_n(\alpha_{n+1})<0$. 0,5 pts
   d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante , en déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts
4) On pose que : $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$
   a) Vérifier que : $0<\alpha_1\leq L\leq 1$ 0,25 pts
   b) Vérifier que : $\left(\forall n\in IN^*\right)$; $h(\alpha_n)=n$ avec $h(x)=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$ 0,25 pts
   c) Montrer que : $L=1$ 0,25 pts
   d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$ 0,25 pts

Partie :II

1) a) Etudier le signe de l'intégrale $\int_x^1 f(t)dt$ pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$. 0,25 pts
   b) En utilisant une intégration par parties montrer que : $(\forall x>0)$; $\int_x^1 f(t)dt=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$ 0,5 pts
   c) En déduire, en $\mathbf{cm}^2$, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et les droites d'équations respectives $x=1$, $x=e^2$ et $y=0$. 0,25 pts
2) Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, on pose : $U_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$
   a) Montrer que pour tout entiers naturels $\mathbf{n}$ et $\mathbf{k}$ tels que : $n\geq 2$ et $1\leq k\leq n-1$, on a:
   $$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$. 0,5 pts
   b) Montrer que : $\left(\forall n\in IN^*\right)$; $\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)dt\leq u_n\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)dt$ 0,5 pts
   c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=4$. 0,25 pts

Exercice .6 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss2

On considère la fonction $\mathbf{g}$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt$.

1) Pour tout x de IR, on pose : $k(x)=\int_{1}^{x} e^{-t^2}dt$.

a) Vérifier que pour tout x de $[0,+\infty[$, ona : $g(x)=-k(\sqrt{x})$ 0,25 pts

b) Montrer que la fonction $\mathbf{g}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. 0,5 pts

c) Calculer $g'(x)$ pour tout $x>0$, en déduire que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}<-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$ 0,75 pts

b) En déduire que la fonction g est non dérivable à droite au point 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu. 0,5 pts

Bon Courage