Exercice .1

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2) On pose : $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $J^2=J\times J$ en déduire que E n'est pas une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

3) On définit sur $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $"*"$ par :

$$(\forall A\in M_2(\mathbb{R}))(\forall B\in M_2(\mathbb{R})) \quad ; \quad A*B=A\times N\times B \quad \text{avec } N=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}) \quad ; \quad \varphi(a+ib)=M(a,b)$$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),*)$

b) On pose $E^*=E-\{0\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

c) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

4) Montrer que $(\forall (A,B,C)\in E^3) \quad ; \quad A*(B+C)=A*B+A*C$

5) Montrer que $(E,+,*)$ est un corps commutatif.

Exercice .2

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit θ un nombre réel tel que $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z suivante : $(E):\ z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

a) Vérifier que $\Delta=(i\sqrt{2}e^{i\theta})^2$ est le discriminant de l'équation (E)

b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

2) On considère les points I, J, T_1, T_2 et A d'affixes respectifs 1, -1, $e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$, $e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.

a) Montrer que les droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$, montrer que les points O, K et A sont alignés.

c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.

3) Soit R la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Donner l'expression complexe de la rotation R.

b) Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation R est : $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$

c) Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont perpendiculaires.

4) Déterminer l'affixe du point C l'image du point A par la translation de vecteur $-\vec{v}$.

5) Montrer que le point A est le milieu du segment $[BC]$.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss1

Soit $\mathbf{n}$ un nombre entier naturel non nul, on pose : $a_n = \underbrace{33\ldots3}_{n\text{ fois le chiffre }3}1$.

1) Vérifier que a_1 et a_2 sont premiers.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3) Démontrer que pour tout entier naturel k : $10^{30k+2} \equiv 7[31]$

4) Démontrer que pour tout entier naturel k : $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$, en déduire que 31 divise a_{30k+1}

5) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul , si $n \equiv 1[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss1

Partie :I

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2}$; $(x>0)$

1) a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$. 0,5 pts

b) Etudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$. 0,25 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>0)$; $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$. 0,25 pts

b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$. 0,25 pts

c) Montrer que : $(\exists \alpha \in]0,1[)$; $f'(\alpha)=0$. 0,5 pts

d) En déduire que : $(\exists \alpha \in]0,1[)$; $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=0$. 0,5 pts

Partie :II

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

(C) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

1) a) Vérifier que : $(\forall x \in [1,+\infty[)$; $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{t^2}{1+t^2} \le 1$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall x \in [1,+\infty[)$; $F(1)-\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 \le F(x) \le F(1)-\dfrac{1}{4}(\ln x)^2$. 1 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus. 1 pts

2) a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ puis calculer $F'(x)$. 0,5 pts

b) Etudier les variations de F sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

Partie :III

1) a) Vérifier que : $(\forall t \in]0,+\infty[)$; $-t\ln(t) \le e$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall t \in [0,+\infty[)$; $f(t) \le \dfrac{1}{e}$. 0,25 pts

c) Vérifier que : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $F(x) < x$ 0,25 pts

2) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0 =]0,1[$ et $(\forall n \in IN)$; $U_{n+1} = F(U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $U_n \in]0,1[$. 0,25 pts

b) Montrer la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante en déduire qu'elle est convergente. 0,5 pts

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. 0,5 pts

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2014 – Ss1

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$; $(x>0)$

1) Montrer que la fonction g est continue sur $[0,+\infty[$. 0,5 pts

2) Pour tout x de $[0,+\infty[$, on pose : $L(x)=\int_0^x g(t)dt$.

a) Montrer que la fonction L est continue sur $[0,+\infty[$. 0,25 pts

b) Calculer $L(x)$ pour tout $x>0$ 0,25 pts

c) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} L(x)$ en déduire $L(0)$ 0,5 pts

3) Pour tout entier $n\geq 1$, on pose : $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$.

Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite. 0,5 pts

Bon Courage