Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Les parties **I** et **II** sont indépendants.

Partie : I Pour tous x et y éléments de $G =]1,2[$, on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G.
2) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif

   et on considère l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ dans G tel que : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

   a) Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(G, *)$.
   b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif et déterminer son élément neutre.

Partie : II On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I et que $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel·

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $M(x,y) = xI + yA$.

On considère l'ensemble $E = \{M(x,y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

1) a) Vérifier que $A^3 = 0$, en déduire que A est un diviseur de zéro dans $(M_3(\mathbb{R}), +)$.
   b) Vérifier que $(A^2 - A + I)(A + I) = I$

   En déduire que la matrice $(A+I)$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}), +)$ qu'on déterminera.
2) Démontrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel et donner une base de cet espace.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Partie I : Soit a un nombre complexe différent de 1.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E) : \ 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

1) Montrer que $z_1 = \dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ et $z_2 = \dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ sont les solutions de l'équation (E).
2) On pose : $a = e^{i\theta}$ tel que $0 < a < \pi$

   a) Montrer que $a - 1 = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$
   b) En déduire la forme trigonométrique de chacune des solutions z_1 et z_2.

Partie II :

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On suppose que $\text{Re}(a) < 0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$.

1) Déterminer les affixes de chacun des points J et K milieux respectifs des segment $[AC]$ et $[AB]$ en fonction de a.
2) Soit R_1 la rotation de centre J et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   On pose : $C' = R_1(C)$ et $A' = R_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'.

   Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$.

3) Calculer $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ en déduire que la droite (AB') est une hauteur dans le triangle $A'B'C'$.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Une urne contient 7 boules indiscernables au toucher :
Trois Boules rouges et quatre boules noires.

Partie :I

On tire au hasard quatre boules de l'urne successivement et avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires dans un tirage .

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
2) Déterminer E(X) l'espérance mathématique de la variable X.

Partie :II

On effectue l'expérience suivante en trois étapes :

Première étape : On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et la rend dans l'urne.
Deuxième étape : On ajoute dans l'urne cinq boules de même couleur que la boule tirée dans la première étape.
Troisième étape : On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne qui contient maintenant 12 boules.

On considère les événements suivants :

N : « la boule tirée dans la première étape est Noire »
R : « la boule tirée dans la première étape est rouge »
E : « toutes les boules tirées dans la troisième étape sont noires »

1) Montrer que $p(E\cap N)=\frac{12}{55}$.
2) Calculer $p(E)$.
3) Calculer la probabilité de l'événement **E** sachant que l'événement **R** est réalisé

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

1) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$; $(x>0)$

a) Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0 et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,5 pts

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point 0. 0,5 pts

c) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que sa fonction dérivée est définie par : $\forall x>0$; $f'(x)=\frac{-x\ln x(1+\ln x)}{\left(1+(x\ln x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ 0,5 pts

d) Dresser le tableau de variations de la fonction f. 0,5 pts

2) On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

(C_F) est la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Déterminer une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ sur $[e,+\infty[$. 0,25 pts

b) Montrer que : $(\forall t\geq e)$; $t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}<\sqrt{2}\,t\ln t$. 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall t\geq e)$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\ln(\ln x)$. 0,75 pts

d) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$. 0,5 pts

e) Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses . 0,5 pts

f) Construire (C_F). (On prendra $F(1)\approx 0,5$ et $F\left(\frac{1}{e}\right)\approx 0,4$) 1 pts

3) Pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$, on pose : $\varphi(x)=x-F(x)$

a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, puis étudier les variations de la fonction φ. 0,75 pts

b) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$, l'équation $\varphi(x)=n$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $[0,+\infty[$. 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\alpha_n\geq n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ 0,5 pts

4) a) Montrer que : $(\forall n\geq 1)$; $0<\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}<\frac{F(n)}{n}+f(n)$ 0,5 pts b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$. 0,5 pts

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n=\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n=\ln(u_n)$

1) Vérifier que : $(\forall n\geq 1)$; $v_n=n^2[\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))]$. 0,25 pts

2) En utilisant le TAF Montrer que : $(\forall n\geq 1)(\exists c\in]n;n+1[)$; $v_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$ 0,5 pts

3) Montrer que : $(\forall n\geq 1)$; $\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}$ 0,5 pts

4) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. 0,5 pts

Bon Courage