Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire intègre.

1) On définit dans $\mathbb{Z}$ la loi de composition interne $"*"$ par : $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2)$; $x*y=x+y-2$

a) Montrer que la loi $"*"$ est commutative et associative.

b) Montrer que la loi $"*"$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

c) Montrer que la loi $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.

2) On définit dans $\mathbb{Z}$ la loi de composition interne $"T"$ par : $(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2)$; $xTy=xy-2x-2y+6$

et on considère l'application f définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ par : $\forall x\in\mathbb{Z}$; $f(x)=x+2$

a) Montrer que l'application f est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{Z},\times)$ dans $(\mathbb{Z},T)$.

b) Montrer que : $(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3)$; $(x+y)Tz=(xTz)+(yTz)$.

3) En déduire de tout ce qui précède que $(\mathbb{Z},*,T)$ est un anneau commutatif unitaire.

4) a) Montrer que : $xTy=2 \iff (x=2 \text{ ou } x=3)$.

b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est intègre.

c) l'anneau $(\mathbb{Z},*,T)$ est-il un corps ? justifier la réponse.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

Partie I : Soit a un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E):\quad 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$$

1) Vérifier que $\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$ est le discriminant de l'équation (E)

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère les points A, B et M d'affixes respectifs a, $b=ae^{\frac{i\pi}{3}}$ et z.

Soit R la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : $A_1=R^{-1}(A)$ et $A_1=R^{-1}(A)$

soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1.

1) Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

2) a) Montrer que : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et $a_2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b) Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme..

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2013 – Ss1

Le but de cet exercice est de chercher s'il existe des entiers naturels n supérieurs strictement à 1 vérifiant la relation $(\mathfrak{R})$ suivante : $(\mathfrak{R}):\ 3^n-2^n\equiv 0[n]$.

1) On suppose que l'entier n vérifie la relation $(\mathfrak{R})$. Soit p le plus petit diviseur premier positif du nombre n.

a) Montrer que $3^n-2^n\equiv 0[p]$, en déduire que $p\geq 5$.

b) Montrer que $2^{p-1}\equiv 1[p]$ et $3^{p-1}\equiv 1[p]$.

c) Montrer qu'il existe un couple (a,b) un couple de $\mathbb{Z}^2$ tel que $an-b(p-1)=1$ tel $k\in\mathbb{N}^*$

d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $(p-1)$.

(signifie que : $a=q(p-1)+r$ avec $q\in\mathbb{Z}$ et $0\leq r<p-1$)

Montrer qu'il existe un entier non nul k tel que : $rn=1+k(p-1)$

2) Déduire de tout ce qui précède, qu'il n'existe aucun entier naturel n supérieur strictement à 1 vérifiant la relation $(\mathfrak{R})$.

Partie :I

1) Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par: $h(1)=1$ et $h(x)=\dfrac{x-1}{x\ln x}$; $(x>1)$

a) Montrer que la fonction h est continue à droite au point 1. 0,25 pts

b) Montrer que : $\forall x>1$; $\ln x < x-1$ en déduire que h est strictement décroissante $]1,+\infty[$. 0,75 pts

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ puis dresser le tableau de variations de h.

b) En déduire que : $\forall x\geq 1$; $0<h(x)\leq 1$. 0,25 pts

Partie :II

On considère la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par : $g(1)=\ln 2$ et $g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt$; $x>1$

(C) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Vérifier que : $(\forall t>1)$; $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$. 0,25 pts

b) Montrer que : $(\forall t>1)$; $g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$. 0,25 pts

c) Montrer que : $(\forall t>1)$; $g(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$. 0,5 pts

2) a) Montrer que : $(\forall x>1)$; $(x-\sqrt{x})h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})$. 0,5 pts

b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite au point 1. 0,5 pts

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$ 0,75 pts

3) a) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $(\forall x>1)$; $g'(x)=\dfrac{1}{2}h(\sqrt{x})$. 0,75 pts

b) En déduire que : $(\forall x\geq 1)$; $0<g'(x)\leq\dfrac{1}{2}$ puis dresser le tableau de variations de g 0,5 pts

c) Construire (C). 0,5 pts

Partie :III

A) 1) Montrer que la fonction $k: x \mapsto g(x)-x+1$ est une bijection de $[1,+\infty[$ vers $]-\infty;\ln 2]$. 0,5 pts

2) En déduire qu'il existe un réel unique $\alpha\in]1;+\infty[$ tel que $1+g(\alpha)=\alpha$ 0,25 pts

B) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $1\leq U_0<\alpha$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=1+g(U_n)$

1) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $1\leq U_n<\alpha$. 0,5 pts

b) Montrer la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante 0,5 pts

c) Montrer la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\alpha$. 0,75 pts

2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|U_0-\alpha|$. 0,5 pts

c) En déduire une deuxième fois que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\alpha$. 0,25 pts

Bon Courage