Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

Les parties **I** et **II** sont indépendants.

Partie : I Pour tous $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ éléments de $\mathbf{I}=\left[1,+\infty\right[$, on pose : $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}=\left(\sqrt{\mathbf{a}}+\sqrt{\mathbf{a}}-1\right)^2$

1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans $\mathbf{I}$.
2) Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative dans $\mathbf{I}$.
3) Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre dans $\mathbf{I}$ qu'on déterminera.

Partie : II On rappelle que $(\mathbf{M_2(IR)},+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle $\mathbf{0}$ et dont l'unité est la matrice identique $\mathbf{I}$.

On considère l'ensemble $\mathbf{E}=\left\{\mathbf{M(x)}=\begin{pmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{2(x-1)}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}/\mathbf{x}\in\mathbf{IR}\right\}$

1) Montrer que $\mathbf{E}$ est une partie stable de $(\mathbf{M_2(IR)},\times)$.
2) On considère l'application φ définie de $\mathbf{IR^*}$ dans $\mathbf{E}$ par : $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{IR^*}$; $\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{M(x)}$
   a) Montrer que l'application φ est un homomorphisme bijectif de $(\mathbf{IR^*},\times)$ dans $(\mathbf{E},\times)$.
   b) En déduire la structure de $(\mathbf{E},\times)$.
   c) On pose $\mathbf{H}=\left\{\mathbf{M(x)}=\begin{pmatrix}\mathbf{2^n} & \mathbf{2^{n+1}-2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}/\mathbf{n}\in\mathbf{Z}\right\}$, Montrer que $(\mathbf{H},\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{E},\times)$.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

Les deux parties I et II sont indépendantes.

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathbf{O},\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\right)$

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(\mathbf{E}):\ \mathbf{z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0}$

1) Vérifier que le nombre $\mathbf{z_1=1+\frac{2}{3}i}$ est une solution de l'équation $(\mathbf{E})$
2) Montrer que la deuxième solution de l'équation $(\mathbf{E})$ est $\mathbf{z_2=3z_1}$

Partie II : On considère trois points deux à deux distincts $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{\Omega}$ d'affixes respectifs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et ω.

Soit $\mathbf{R}$ la rotation de centre $\mathbf{\Omega}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : $\mathbf{P=R(A)}$ et $\mathbf{B=R(Q)}$

soient $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ les affixes respectifs de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$.

1) a) Montrer que : $\mathbf{p=\omega+e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)}$ et $\mathbf{q=\omega+e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)}$.
   b) Montrer que : $\dfrac{\mathbf{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}}{\mathbf{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}}=\mathbf{e^{\frac{4i\pi}{3}}}$.
   c) Montrer que : $\dfrac{\mathbf{p-a}}{\mathbf{q-b}}=\left(\dfrac{\omega-\mathbf{a}}{\omega-\mathbf{b}}\right)\mathbf{e^{\frac{4i\pi}{3}}}$.
2) On suppose que : $\left(\dfrac{\omega-\mathbf{a}}{\omega-\mathbf{b}}\right)=\mathbf{e^{\frac{2i\pi}{3}}}$
   a) Montrer que est un **APQR** parallélogramme.
   b) Montrer que $\arg\left(\dfrac{\mathbf{b-a}}{\mathbf{p-b}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, en déduire que **APQR** est un rectangle.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

1) a) Vérifier que : 503 est entier premier.

b) Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$, en déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : (E) : $49x - 6y = 1$.

sachant que le couple $(1;8)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) avec la mise évidence des étapes de la résolution.

3) On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \cdots + 7^{2007}$.

a) Montrer que le couple $(7^{2006}; N)$ est solution de l'équation (E).

b) En déduire que N est divisible par 2012.

c) Montrer que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

Partie I :

Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

1) Etudier les variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$. 0,5 pts

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$ 0,5 pts

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. 1 pts

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x g(e^{-x})$. 0,5 pts

3) Dresser le tableau de variations de f . 0,5 pts

4) Construire (C) la courbe de f et (C') la courbe de $(-f)$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 1 pts

(On admet que (C) admet un point d'inflexion unique dont l'abscisse est $-0,7$).

5) Montrer que pour tout x de $]0, 1[$: $0 < f'(x) < g(e)$ 0,75 pts

6) Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une solution unique α dans IR et que $-1 < \alpha < 0$ 0,75 pts

7) On considère la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par: $U_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = -f(U_n)$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $-1 \leq U_n \leq 0$. 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|U_n - \alpha|$. 0,5 pts

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|U_n - \alpha| \leq (g(e))^n$. 0,5 pts

d) Sachant que $g(e) < 0,6$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. 0,25 pts

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss2

On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{\ln t}{1 + t^2} \right) dt$

1) Calculer $F(1)$. 0,25 pts

2) a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0$ 0,5 pts

b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$, on a : $F(x) = 0$ 0,5 pts

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x>0$:

$$F(x)=\left(\operatorname{Arc\,tan}(x)+\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\operatorname{Arc\,tan}(t)}{t}dt$$ 0,5 pts

4) Montrer que : $(\forall x>0)\ ;\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(x)$. 0,25 pts

5) En déduire que : $(\forall x>0)\ ;\ \ln x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\operatorname{Arc\,tan}(t)}{t}dt$ 0,5 pts

Bon Courage