Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

Partie : I On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I.

On pose $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1) Calculer : $I-A$ et A^2.

2) En déduire que la matrice A admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}),+)$ qu'on déterminera.

Partie : II Pour tous a et b éléments de $I=]1,+\infty[$, on pose : $a*b=\left(\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}\right)^2$

1) Vérifier que : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$; $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$.

2) Montrer que la loi $*$ est une loi de composition interne dans I.

3) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ est un groupe commutatif.

1) On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans I par : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$; $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$

a) Montrer que l'application φ est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ dans $(I,*)$.

b) En déduire la structure de $(I,*)$.

4) On pose $H=\left\{\sqrt{1+2^m}/m\in\mathbb{Z}\right\}$, Montrer que $(H,\times)$ est un sous-groupe de $(I,*)$.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

Les deux parties I et II sont indépendantes.

le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\ iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$, où a est un complexe non nul.

1) Déterminer z_1 et z_2 solutions de l'équation (E).

2) a) vérifier que : $z_1z_2=a^2(i-1)$.

b) Montrer que : (z_1z_2 est un réel) $\Longleftrightarrow$ $\arg(a)=\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Partie II : Soit c un nombre complexe non nul et c un nombre complexe non nul.

1) On considère les points A, B, C, D et M d'affixes respectifs : 1, $(1+i)$, c, ic et z.

a) Montrer que : (A, D et M sont alignés) $\Longleftrightarrow$ $(ic+1)z+(ic-1)\overline{z}=2ic$

b) Montrer que : $(AD)\perp(OM)$ $\Longleftrightarrow$ $(ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0$

2) Soit h l'affixe du point H la projection orthogonale du point O sur la droite (AD)

a) Montrer que : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$

b) En déduire que : $(BH)\perp(CH)$

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E):\ 143x-195y=52$.

1) a) Déterminer le plus grand diviseur commun des nombres 143 et 195, en déduire que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

b) Sachant que le couple $(-1;-1)$ est une solution particulière de (E), Déterminer la solution générale de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5, montrer que $(\forall k \in \mathbb{N})$; $n^{4k} \equiv 1[5]$.

3) Soient x et y deux nombres entiers non nuls tels que $x \equiv y[4]$.

a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $n^x \equiv n^y\ [5]$

b) En déduire que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$; $n^x \equiv n^y\ [10]$

4) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que le couple $(x;y)$ soit solution de l'équation (E).

Montrer que quel que soit n de $\mathbb{N}^*$: les nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans le système de numération décimal

Exercice .4

Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2012 – Ss1

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par: $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

(C_n) est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x)$ 0,5 pts

2) a) Etudier la branche infinie de la courbe (C_n) au voisinage de $-\infty$. 0,5 pts

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_n) au voisinage de $+\infty$ et Déterminer la position relative de (D) et de (C_n). 0,5 pts

3) Etudier les variations de la fonction f_n puis dresser son tableau de variations. 0,75 pts

4) Construire la courbe (C_3). 0,5 pts (On prendra : $f_3(-1,5) \approx 0$, $\ln 3 \approx 1,1$ et $f_3(-0,6) \approx 0$)

5) a) Montrer que pour tout $n \geq 3$: $\dfrac{e}{n} < \ln(n)$ 0,25 pts

b) Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n tels que :

$\dfrac{-e}{n} < y_n < 0$ et $x_n < -\ln(n)$ 0,25 pts

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 0,5 pts

6) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par: $f(0) = -1$ et $f(x) = -1 - x\ln x$; $(x > 0)$

a) Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0 . 0,25 pts

b) Vérifier que pour tout $n \geq 3$: $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right) = \dfrac{\ln n}{x_n}$ 0,5 pts

c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln n}{x_n}$ 0,25 pts

Exercice .5

Bac National Sc maths - 2012 - Session : 1 — 4,5 points

Soit la fonction F définie sur l'intervalle $[0;1]$ par: $F(0) = 1$ et $F(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(1+2x)}{2x^2}$; $(x \in]0;1])$

1) Soit x un élément de l'intervalle $[0;1]$, montrer que : $(\forall t \in [0,x])$; $\dfrac{1}{1+2x} \leq \dfrac{1}{1+2t} \leq 1$ 0,5 pts

2) Soit x un élément de l'intervalle $]0;1]$.

a) Montrer que : $F(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+2t}\,dt$ 0,5 pts

b) Montrer que : $\frac{1}{1+2x} \le F(x) \le 1$, en déduire que F est continue à droite au point 0. 0,75 pts

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in [0;1]) \quad ; \quad \int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$ 0,75 pts

4) Soit x un élément de l'intervalle $]0;1]$.

a) Montrer que : $F'(x) = \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ 0,5 pts

b) Montrer que : $\frac{-4}{3} \le F'(x) \le \frac{-4}{3(1+2t)^2}$. 0,75 pts

c) En appliquant le TAF à la fonction F sur $[0;x]$, montrer que :

$$\frac{-4}{3} \le \frac{F(x)-F(0)}{x} \le \frac{-4}{3(1+2x)^2} \ .$$ 0,75 pts

d) En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 est déterminer le nombre dérivé à droite de 0. 0,25 pts

Bon Courage