Exercice .1 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Pour tout éléments x et y de l'intervalle $I =]0,1[$, on pose : $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

1) a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I.
   b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I.
   c) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans I qu'on déterminera.
   d) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

2) On considère les deux ensembles : $H = \{2^n / n \in Z\}$ et $K = \left\{\dfrac{1}{2^n + 1} / n \in Z\right\}$

   a) Montrer que H est un sous groupe de $(IR_+^*, \times)$.

   b) On considère l'application φ définie de H dans I par : $f(x) == \dfrac{1}{x+1}$

   Montrer que φ est un homomorphisme de $(H,\times)$ vers $(I,*)$.
   En déduire que $(K,*)$ est un sous-groupe de $(I,*)$.

Exercice .2 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

1) Montrer que le nombre $-2i$ est une solution de l'équation (E)
2) Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :
   $(\forall z \in C): \quad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$
   a) Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $(5-12i)$
   b) Résoudre dans l'équation (E).

Partie II : le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
On considère les points deux à deux A, B et C d'affixes respectifs $a = -1+3i$, $b = -2i$ et $c = 2+i$.
1) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle de sommet C.
2) Soit R_1 la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$.

   Soit M un point du plan d'affixe z On pose : $M_1 = R_1(M)$ et $M_2 = R_2(M)$.

   a) Vérifier que l'expression analytique de la rotation R_1 est : $z_1 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$.

   b) Déterminer z_2 affixe de M_1 en fonction de z.
   c) En déduire que I, milieu du segment $[M_1M_2]$ est un point fixe.

Exercice .3 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

Soit x un nombre entier naturel tel que : $10^x \equiv 2[19]$.

1) a) Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$
   b) Montrer que $10^{18} \equiv 1[19]$
2) Soit d un diviseur commun de $(x+1)$ et 18
   a) Montrer que $10^d \equiv 1[19]$.
   b) Montrer que $d = 18$.
   c) En déduire que : $x \equiv 17[18]$

Exercice .4 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln x$.
(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$. 1 pts

2) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f . 0,5 pts

b) Montrer que la fonction est une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ vers un intervalle J qu'on déterminera, puis dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1} . 0,75 pts

3) Calculer $f(1)$ et $f(e)$, puis construire les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sur le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. 0,5 pts

4) a) Montrer que $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx=1$. (on pourra poser : $t=f^{-1}(x)$) 0,5 pts

b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe $(C_{f^{-1}})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e+1$ et $y=x$. 0,5 pts

5) On considère l'équation (E_n) : $x+\ln x=n$

a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique x_n. 0,25 pts

b) Déterminer la valeur de x_1 puis démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$ 0,5 pts

6) a) Montrer que : $(\forall n\geq 1)\ ;\ f(x_n)\leq f(n)$, en déduire que : $(\forall n\geq 1)\ ;\ x_n\leq n$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n\geq 1)\ ;\ n-\ln n\leq x_n$ 0,5 pts

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_n-n}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_n}{n-\ln n}\right)$. 0,5 pts

Exercice .5 Site : maths-inter.ma -Bac Sm -2011 – Ss2

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par: $f_n(x)=-1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}$

1) Montrer que pour tout $n\geq 2$, il existe un réel unique α_n de $]0;1[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$ 0,5 pts

2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente (On pose : $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_n$) 0,75 pts

3) a) Vérifier que pour tout réel $t\neq 1$: $1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{t^n}{1-t}$ 0,5 pts

b) En déduire que : $(\alpha_n)+\dfrac{(\alpha_n)^2}{2}+\dfrac{(\alpha_n)^3}{3}+\cdots+\dfrac{(\alpha_n)^n}{n}=-\ln(1-\alpha_n)-\int_0^{\alpha_n}\dfrac{t^n}{1-t}dt$ 0,5 pts

4) a) Montrer que : $1+\ln(1-\alpha_n)=-\int_0^{\alpha_n}\dfrac{t^n}{1-t}dt$ 0,5 pts

b) Montrer que : $(\forall n\geq 2)\ ;\ 0\leq\int_0^{\alpha_n}\dfrac{t^n}{1-t}dt\leq\dfrac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$ 0,5 pts

c) En déduire que : $L=1-e^{-1}$

Bon Courage